Relações de Equivalência e de Ordem

complemento para a disciplina de Matemática Discreta – versão 1

Jerônimo C. Pellegrini

5 de agosto de 2013

Sumário

Nomenclatura

2^X	conjunto das partes de X, página 1
$\preceq$	relação de ordem, página 7
$\underline{n}$	Conjunto de inteiros de 1 a n, página 9
$A \times B$	produto cartesiano de A e B, página 1

Capítulo 1

Conjuntos e Relações

Definição 1.1 (produto cartesiano)**.** O *produto cartesiano* de dois conjuntos A e B, denotado $A \times B$, é o conjunto de todos os pares ordenados onde o primeiro elemento pertence a A e o segundo pertence a B – ou seja,

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}. \qquad \blacklozenge$$

Definição 1.2 (relação)**.** Uma relação R entre conjuntos A e B é um subconjunto do produto cartesiano $A \times B$. Define-se semelhantemente uma relação entre vários conjuntos A_i como subconjunto do produto cartesiano $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$.

Uma relação é, portanto, um conjunto de pares ordenados.

Se um par (x, y) pertence a uma relação R, denotamos xRy. Podemos também denotar $x\overline{R}y$ quando $(x, y) \notin R$. ♦

Definição 1.3 (conjunto potência)**.** Seja X um conjunto. Então 2^X é o *conjunto potência*, ou *conjunto das partes* de X:

$$2^x = \{Y : Y \subseteq X\} \qquad \blacklozenge$$

O teorema a seguir nos diz porque a nomenclatura 2^X é usada.

Teorema 1.4. *para qualquer conjunto* X, $|2^X| = 2^{|X|}$.

Definição 1.5 (reflexividade, simetria e transitividade)**.** Uma relação R em um conjunto A é

- *reflexiva* se aRa para todo $a \in A$,
- *simétrica* se aRb implica em bRa para todos $a, b \in A$,
- *transitiva* se aRb e bRc implicam em aRc para todos $a, b, c \in A$. ♦

Exemplo 1.6. A relação $=$ de igualdade entre números é reflexiva, porque $a = a$, simétrica, porque se $a = b$ então $b = a$, e transitiva, porque $a = b$ e $b = c$ implicam em $a = c$. ◀

Teorema 1.7. *Uma relação* R *é transitiva se e somente se* $R \circ R \subseteq R$.

1.1 Grafos

Um *grafo* é uma representação gráfica de uma relação. Informalmente, representamos uma relação R em um conjunto X graficamente da seguinte maneira: os elemenos de X são dispostos como pontos no plano, e quando xRy, desenhamos um traço ligando x a y. Os pontos são chamados de *vértices*, e os traços de *arestas*.

Definição 1.8 (grafo)**.** Um *grafo* é um conjunto de nós ligados por arestas. Formalmente, um grafo é um par (V, E), tal que V é o conjunto de nós (ou *vértices*), e V é um conjunto de arestas.

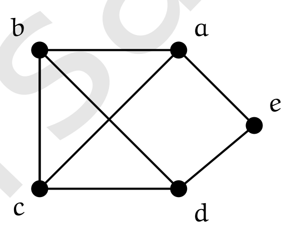
Em um grafo *orientado*, $E \subseteq V^2$, e uma aresta é um par (v, w).

Em um grafo *não-orientado*, $E \subseteq \Big\{\{x, y\} : x, y \in V\Big\}$, e uma aresta é um conjunto $\{x, y\}$, com $x, y \in V$. ⧫

Exemplo 1.9. Por exemplo, o grafo não-orientado $G = (V, E)$ onde $V = \{a, b, c, d, e\}$ e

$$E = \begin{Bmatrix} \{a, b\}, & \{a, c\}, & \{a, e\}, & \\ \{b, c\}, & \{b, d\}, & \{c, d\}, & \{d, e\} \end{Bmatrix}.$$

é representado graficamente na figura a seguir.

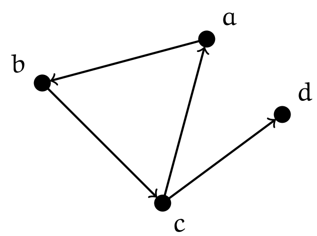


◀

Exemplo 1.10. O grafo orientado $G = (V, E)$, com $V = \{a, b, c, d\}$ e

$$E = \{(a, b), (b, c), (c, a), (c, d)\}$$

é representado graficamente como na figura a seguir.



◀

Definição 1.11 (matriz de incidência)**.** Seja $G = (V, E)$ um grafo com n vértices. Sem perda de generalidade, presuma que os vértices de G são rotulados como $v_1, v_2, \ldots v_n$. A *matriz de incidência* de G é uma matriz quadrada de ordem $|V|$ tal que a posição i, j é zero se não há aresta livando v_i a v_j, e um se há aresta ligando v_i a v_j. Para grafos orientados, a matriz de incidência M é tal que

$$m_{i,j} = \begin{cases} 0 & se (i,j) \notin E \\ 1 & se (i,j) \in E \end{cases}$$

Para grafos não-orientados a matriz é definida de forma semelhante. ♦

Exemplo 1.12. A matriz de incidência do grafo não-orientado do exemplo 1.9 é

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Já para o grafo orientado do exemplo 1.10, a matriz de incidência é

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

◀

1.2 Relações de equivalência

Definição 1.13 (relação de equivalência)**.** Uma relação é dita *de equivalência* se é *simétrica*, *reflexiva* e *transitiva*. ♦

Exemplo 1.14. A relação em $\mathbb{R}$ dada por aRb se e somente se $a^2 = b^2$ é uma relação de equivalencia:

- *(reflexiva)*: trivialmente, $a^2 = a^2$.
- *(simétrica)* se $a^2 = b^2$, então $b^2 = a^2$.

- *(transitiva)* se $a^2 = b^2$ e $b^2 = c^2$, temos também trivialmente $a^2 = c^2$. ◀

Exemplo 1.15. Dois triângulos são *congruentes* se os tamanhos de seus lados, quando dispostos em ordem crescente, são iguais.

A congruência de triângulos é uma relação de equivalência no conjunto de todos os triângulos no plano.

- *(reflexiva)*: trivialmente, todo triângulo é congruente a si mesmo.
- *(simétrica)* também trivial: se A é côngruo a B, então B é côngruo a A.
- *(transitiva)* se A é côngruo a B e B é côngruo a C, claramente A é côngruo a C, porque os tamanhos dos lados de todos os tres triângulos são os mesmos.

Dizemos também que dois triângulos são *similares* se seus lados, quando dispostos em ordem crescente, só diferem por um fator constante (ou seja, admitimos também uma mudança de escala). A similaridade de triângulos é uma relação de equivalência.

As relações de congruência e similaridade podem ser generalizadas para quaisquer figuras geométricas, e continuam sendo relações de equivalência. ◀

Exemplo 1.16. Em $\mathbb{R}$, a relação aRb se e somente se $a - b \in \mathbb{Z}$ é uma relação de equivalência:

- *(reflexiva)* claramente, $a - a = 0 \in \mathbb{Z}$,
- *(simétrica)* se $a - b = c \in \mathbb{Z}$, então $b - a = -c \in \mathbb{Z}$,
- *(transitiva)* se $a - b = k_1 \in \mathbb{Z}$, e $b - c = k_2 \in \mathbb{Z}$, então $a - c = (k_1 + b) - (b - k_2) = k_1 + k_2 \in \mathbb{Z}$. ◀

A definição a seguir é usada como exemplo, mas é suficientemente importante para que a destaquemos.

Definição 1.17 (congruência módulo um inteiro)**.** Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$. Dizemos que a é *côngruo a* b *módulo* m se $m|(a - b)$. Isso é o mesmo que dizer que existe um k inteiro tal que $mk = a - b$ – ou seja, o resto de a por m é igual ao resto de b por m. Denotamos $a \equiv b \pmod{m}$. ⧫

Exemplo 1.18. A relação de congruência módulo um inteiro é uma relação de equivalência. Para todos $a, b, c, m \in \mathbb{Z}$,

- *(reflexiva)*: trivialmente, $a \equiv a \mod m$, porque $m|(a - a = 0)$.
- *(simétrica)* se $a \equiv b \pmod{m}$, $b \equiv a \pmod{m}$, porque se $m|(a - b)$, então $m|(b - a)$.

- *(transitiva)* se $m|(a-b)$, e $m|(b-c)$, então $m|[(a-b)+(b-c)]$, e claramente $m|(a-c)$. ◄

Exemplo 1.19. Seja F o conjunto de todas as funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Defina que fRg se e somente se existe uma constante c tal que $f(x) = g(x) + c$, para todo x. Então R é uma relação de equivalência.

- *(reflexiva)*: $f(x) = f(x) + 0$.
- *(simétrica)* se $f(x) = g(x) + c$, então $g(x) = f(x) + (-c)$.
- *(transitiva)* se $f(x) = g(x) + c_1$ e $g(x) = h(x) + c_2$, então $f(x) = h(x) + c_2 + c_1$. ◄

Exemplo 1.20. No conjunto de todas as funções reais, a relação definida por fRg se e somente se $f' = g'$ (ou seja, f e g tem a mesma derivada) é uma relação de equivalência. ◄

Definição 1.21 (classe de equivalência)**.** Seja R uma relação de equivalência em um conjunto A. Então a *classe de equivalência* de um elemento $a \in A$ é o conjunto $\{x \in A : xRa\}$. ♦

Exemplo 1.22. Já determinamos que a congruência modulo um m inteiro é uma relação de equivalência. Como o resto da divisão de qualquer inteiro por m só pode estar entre zero e $m-1$, a relação de congruência módulo m define m classes de congruência, que usualmente denotamos $[0]$, $[1]$, ..., $[m-1]$. Por exemplo, se $m = 5$, temos

$$\begin{aligned}
[0] &= \{\ldots, -10, -5, 0, 5, 10, \ldots\}\\
[1] &= \{\ldots, -9, -4, 1, 6, 11, \ldots\}\\
[2] &= \{\ldots, -8, -3, 2, 7, 12, \ldots\}\\
[3] &= \{\ldots, -7, -2, 3, 8, 13, \ldots\}\\
[4] &= \{\ldots, -6, -1, 4, 9, 14, \ldots\}.
\end{aligned}$$ ◄

Exemplo 1.23. Em $\mathbb{Z}^2$, a relação $\sim$, definida por

$$(a, b) \sim (x, y) \Leftrightarrow ay = bx$$

é uma relação de equivalência:

- *(reflexividade)* trivialmente, $(a, b) \sim (a, b)$, já que $ab = ba$.
- *(simetria)* também é trivial: $ab = ba$ implica em $ba = ab$.
- *(transitividade)* queremos mostrar que se

$$\begin{aligned}
(a, b) &\sim (x, y)\\
(x, y) &\sim (p, q)
\end{aligned}$$

então $(a, b) \sim (p, q)$. Usando a definição da relação, o que queremos é provar que se

$$\begin{aligned} ay =& bx \\ xq =& yp \end{aligned} \tag{1.1}$$

então

$$aq = bp \tag{1.2}$$

É de vital importância observar, no entanto, que não podemos simplesmente dividir um dos lados de qualquer destas equações por uma das variáveis, porque estamos trabalhando com inteiros. Podemos, no entanto, multiplicar $ay = bx$ por q:

$$ayq = bxq$$

Podemos substituir qx por yp (equação 1.1):

$$ayq = ypb$$

Aqui sim, sabemos que ambos os lados da equação são divisíveis por y, e portanto

$$aq = bp,$$

que é o que queríamos mostrar (equação 1.2).

A classe de equivalência $[(a, b)]$ define o número racional que usualmente denotamos por a/b, e a relação $\sim$ define igualdade entre racionais: $(1, 2) \sim (3, 6) \sim (50, 100)$, etc. ◀

Definição 1.24 (partição de conjunto)**.** Uma *partição* de um conjunto A é uma família de conjuntos A_1, A_2, ..., A_n tais que

$$\begin{aligned} \bigcup_{i=1}^{n} A_i =& A \\ A_i \cap A_j =& \emptyset \quad \text{se } i \neq j \end{aligned}$$

♦

Teorema 1.25. *Seja R uma relação de equivalência em um conjunto A. Então as classes de equivalência definidas por R são uma partição de A.*

Demonstração. Em primeiro lugar, a união das classes de equivalência resultam em A, porque todo elemento de A pertence a uma classe de equivalência, e não há nas classes qualquer elemento que não pertença a A. Com isso temos $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$.

Finalmente, mostramos queas classes de equivalência são disjuntas. Suponha que xRy. Mostramos que $[x] \subseteq [y]$. Suponha que $z \in [x]$. Temos então xRz, e por simetria zRx; por transitividade, zRy. Isso implica que $z \in [y]$.

Ou seja, todo $z \in [x]$ também está em $[y]$. Usando simetria, fazemos o argumento contrário e temos $[x] = [y]$.

Suponha agora que $x\overline{R}y$. Mostramos agora que $[x] \cap [y] = \emptyset$. Suponha que $z \in [x] \cap [y]$. Então xRz e zRy valem, e portanto também deveria valer xRy – uma contradição. Temos então $[x] \cap [y] = \emptyset$ quando $[x] \neq [y]$. ■

1.3 Relações de ordem

Definição 1.26 (ordem total)**.** Uma relação R em um conjunto A é dita *de ordem total* se

- R é *antissimétrica*, *reflexiva* e *transitiva*,
- Para todos elementos $a, b \in A$, necessariamente aRb ou bRa. ♦

Exemplo 1.27. A relação $\leq$ no conjunto dos números reais é uma ordem total:

- *(antissimétrica)* Se $a \leq b$ e $b \leq a$ então $a = b$,
- *(reflexiva)* $a \leq a$,
- *(transitiva)* $a \leq b$, $b \leq c$ implica em $a \leq c$.

Além disso, para quaisquer dois reais a e b, temos que $a \leq b$ ou $b \leq a$. ◀

Definição 1.28 (ordem parcial)**.** Uma relação R em um conjunto A é dita *de ordem parcial* se R é *antissimétrica*, *reflexiva* e *transitiva*. ♦

Exemplo 1.29. Toda ordem total é também parcial, portanto os exemplos anteriores de ordem total são também exemplos de ordem parcial. ◀

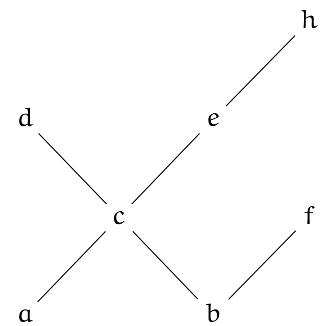
A notação $\preceq$ é normalmente usada para relação de ordem em conjunto parcialmente ordenado.

É comum usar um diagrama para representar relações de ordem parcial. Dada uma relação R em um conjunto X, o *diagrama de Hasse* desta relação é um grafo onde há um vértice para cada elemento de X, e há aresta entre x e y se xRy. Para simplificar o grafo, não são representados os *loops* ($a \preceq a$) e as relações que podem ser deduzidas por transitividade (se $a \preceq b$ e $b \preceq c$, não representamos $a \preceq c$); além disso, não representamos as direções das arestas, e presumimos que todas são orientadas "de baixo para cima".

Exemplo 1.30. No conjunto $\{a, b, c, d, e, f, g\}$, a relação dada por

$$
\begin{aligned}
a &\preceq c \\
b &\preceq c \\
b &\preceq f \\
c &\preceq d \\
c &\preceq e
\end{aligned}
$$

é uma ordem parcial. Seu diagrama de Hasse é



◀

Exemplo 1.31. Dados $a, b \in \mathbb{N}$, denotamos por "$a|b$" o fato de a dividir b (ou seja, existe um c tal que $b = ac$). A relação $|$ é uma ordem parcial em $\mathbb{N}$:

- *(antissimétrica)* Se $a|b$ e $b|a$ então $a = b$, porque $a = bc_1$, $b = ac_2$ implicam em $a = ac_2c_1$, e portanto $c_1 = c_2^{-1}$, mas o único natural com inverso para multiplicação é 1, e $c_1 = c_2 = 1$,

- *(reflexiva)* $a|a$, porque existe $c = 1$ tal que $a = (1)a$,

- *(transitiva)* $a|b$ e $b|c$ implicam e $a|c$.

A relação $|$, no entanto, *não* é ordem parcial, porque dois números naturais não necssariamente se relacionam desta forma. O exemplo mais claro é possivelmente o de dois números primos: se p e q são primos, $p \nmid q$, e $q \nmid p$. ◀

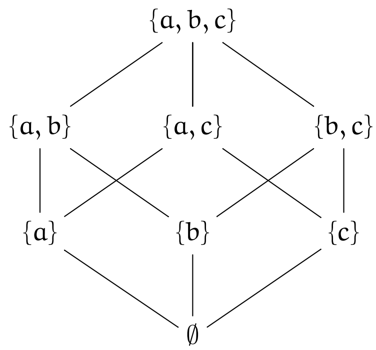
Exemplo 1.32. Seja 2^X o conjunto das partes de X. Então a relação de inclusão, $\subseteq$, é uma ordem parcial em X, mas *não* é ordem total.

- *(antissimétrica)* se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$, então $A = B$.

- *(reflexiva)* $A \subseteq A$, trivialmente.

- *(transitiva)* $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$ implicam em $A \subseteq C$.

Dentre as partes de um conjunto, no entanto, pode haver subcobjuntos que não são se relacionam de nenhuma forma: como exemplo, considere as partes de $\{a, b, c\}$. Podemos ver no diagrama de Hasse que nem todos os pares se relacionam – por exemplo, $\{a, b\} \not\subseteq \{b, c\}$ e $\{b, c\} \not\subseteq \{a, b\}$



◀

Definição 1.33 (ordem lexicográfica)**.** Seja A um conjunto e $\preceq$ uma relação de ordem em A. Sejam $(a_{1,2}), (x_1, x_2) \in A^2$. Dizemos que (a_1, a_2) *precede* (x_1, x_2) *lexicograficamente* se $a_1 \preceq x_1$ ou se $a_1 \approx x_1$ e $a_2 \preceq x_2$.

Sejam $\alpha = (a_1, a_2, \ldots), \beta = (x_1, x_2, \ldots) \in A^n$. Então $\alpha \preceq \beta$ se $a_1 \preceq x_1$ ou se $a_1 \approx x_1$ e $(a_2, \ldots) \preceq (x_2, \ldots)$. ⧫

Exemplo 1.34. Seja A o alfabeto da língua Portuguesa. A ordem lexicográfica é a ordem usada em dicionários: "banalidade" $\preceq$ "banana", porque L $\preceq$ N. ◀

Denotamos por $\underline{n}$ o conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Exemplo 1.35. Seja $\underline{3}^{\underline{3}}$ o conjunto de todas as 27 funções de $\underline{3}$ em $\underline{3}$. denotaremos cada uma destas funções listando $f(1), f(2), f(3)$. Por exemplo, $(1, 3, 3)$ é uma função.

Listamos todas em ordem lexicográfica. Leia as colunas de cima para baixo primeiro, e da esquerda para a direita depois.

111	211	311
112	212	312
113	213	313
121	221	321
122	222	322
123	223	323
131	231	331
132	232	332
133	233	333

◀

Definição 1.36 (boa ordem)**.** Um conjunto X é *bem-ordenado* com uma relação de ordem $\prec$ se esta for uma relação de ordem parcial, e todo subconjunto não vazio de X tenha um menor elemento. ⧫

Exemplo 1.37. O conjunto $\mathbb{N}$ com $\leq$ é bem-ordenado.

Já $\mathbb{Z}$ com $\leq$ não, porque há subconjuntos de $\mathbb{Z}$ onde não haverá menor elemento. ◀

Exercícios

Ex. 1 — Verifique que tipo de relação são:

- Em $\mathbb{R}$, $a \sim b$ se $a - b \in \mathbb{Q}$
- Em $\mathbb{R}$, $a \sim b$ se $|a| = |b|$
- Para matrizes quadradas, $A \sim B$ se $\det A = \det B$
- Para matrizes quadradas não-singulares, $\det A \leq \det B$
- Para matrizes quadradas, $A \sim B$ se $\det AB \neq 0$
- Para polinômios com coeficientes em $\mathbb{R}$ e grau no máximo n, $p(x) \sim q(x)$ se $p(x) + q(x) \leq 0$ (para todo x)
- Para polinômios com coeficietnes em $\mathbb{R}$ e grau no máximo n, $p(x) \sim q(x)$ se $p(x) + q(x)$ tem todas as raízes reais.
- Em $\mathbb{R}$, $\alpha \sim \beta$ se $\alpha + \beta = k\pi/2$, para algum $k \in \mathbb{Z}$
- Em $\mathbb{Z}$, $a \sim b$ se ab tem raiz quadrada inteira
- Em $\mathbb{Z}$, $a \sim b$ se $a^2 - b^2$ tem raiz quadrada inteira
- Em $\mathbb{N}$, $a \sim b$ se a tem menos fatores primos (contando as multiplicidades) do que b
- Em $\mathbb{N}$, $a \sim b$ se a se a multiplicidade do menor fator primo de a é menor que a do menor fator primo de b
- Em $\mathbb{N}$, $a \sim b$ definida da seguinte forma: seja d_a a distancia de a até o primo mais próximo de a. Seja d_b a distância de b até o primo mais próximo de b. $a \sim b$ se $d_a \leq d_b$.

Ex. 2 — Seja $\sim$ uma relação em funções reais definida como

$$f \sim g \iff \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(X) \pm C.$$

Determine se $\sim$ é relação de equivalencia.

Ex. 3 — Construa (parcialmente) o diagrama de Hasse para a relação $|$ em $\mathbb{N}$, dispondo os números com k fatores na k-ésima linha, e assim por diante.

Ex. 4 — Dê uma definição não recursiva para ordem lexicográfica.

Ex. 5 — Seja C o conjunto de todas as circunferências no plano. Mostre diferentes ordens em C, pelo menos uma dela total.

Ex. 6 — Seja E o conjunto de elipses no plano. Mostre pelo menos tres partições de E, explicitando a relação de equivalência que determina cada partição.

Ex. 7 — Fixe um número L natural. Seja $\prec$ definida em qualquer subconjunto de $\mathbb{N}$ da seguinte maneira: $a \preceq b$ se a quantidade de primos entre a e $L/2$ é menor ou igual que a quantidade de primos entre b e $L/2$. A relação $a \prec b$ é ordem total?

Ex. 8 — Seja P um conjunto de proposições $p_1, p_2, \ldots$, e $P^\wedge$ o conjunto de todas as conjunções de proposições em P:

$$P^\wedge = \{p_1, p_2, \ldots, p_n, p_1 \wedge p_2, p_1 \wedge p_3, \ldots, p_2 \wedge p_3, p_2 \wedge p_3, \ldots, P_1 \wedge p_2 \wedge p_3, \ldots\}$$

A relação de implicação ($p_i \rightarrow p_j$) em $P^\wedge$ é de que tipo?

Ex. 9 — Seja $P(n)$ o conjunto de todos os polinômios com grau menor ou igual a n. Claramente pode-se definir uma ordem lexicográfica $\preceq$ em $P(n)$ a partir dos coeficientes dos polinômios. Mostre que, dados dois polinômios $p(.)$ e $q(.)$ em $P(n)$, $p \preceq q$ se e somente se $p(x) \leq q(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Ex. 10 — Mostre uma bijeção entre $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{N}$. Que tipo de relação ela é?

Ex. 11 — Há alguma maneira de ordenar o conjunto dos números complexos, ainda que abrindo mão de algumas de suas características de corpo?

Ex. 12 — Considere o conjunto de todas as sequências de números racionais. Defina a relação R como $(a_n)R(b_n)$ se $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$. Que tipo de relação é R?

Índice Remissivo