Lista de exercícios – determinantes

Ex. 1 — Calcule os determinantes das matrizes a seguir.

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ x & 0 & x^2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -4 \\ 4 & 5 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b & c & 1 \\ b & 0 & 0 & 2 \\ c & 0 & 0 & 3 \\ d & -2 & -3 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 3/2 & 5 \\ 0 & 3 & 3/2 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 & -1 & 0 \\ 22 & 12 & 3/2 & 15 & -2 \\ 51 & 6 & 14 & -2 & 0 \\ 10 & 3 & 3/2 & 34 & -2 \\ -91 & 16 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ex. 2 — Usamos aqui a seguinte notação para matrizes elementares: $E_{i,j}$ troca as linhas i e j; $E_{i(k)}$ multiplica a linha i por k; e $E_{i(j,k)}$ soma k vezes a linha i à linha j. Calcule os determinantes das matrizes a seguir. Diga também de que ordem, *no máximo*, devem ser as matrizes para que as expressões façam sentido. A, B, C são matrizes, e k é escalar.

i) $\det\left[E_{1(2)}\mathcal{I}\right]$

ii) $\det\left[E_{2,3}E_{3,4}E_{2(3)}A\right]$

iii) $\det\left[E_{1,2}E_{3,4}E_{1(2)}AE_{2,3}B(5C)\right]$

iv) $\det\left[E_{2(3,4)}A(3B)E_{1,2}C\right]$

v) $\det\left[E_{1(4)}A(kB)E_{3,1}(4C^{-1})\right]$

vi) $\det\left[k^{-1}AE_{2(k)}B\right]$

Ex. 3 — Seja A uma matriz quadrada com $\det A = d$, e $A' = P_1P_2\dots P_kA$, onde cada P_i é uma matriz que permuta duas linhas adjacentes. Relacione o determinante de A' com k.

Ex. 4 — Prove que se E é uma matriz elementar e A uma matriz quadrada, ambas de mesma ordem, então $\det(EA) = \det(E)\det(A)$.

Ex. 5 — Demonstre:

i) $\det(A) = \det(A^T)$.

ii) $\det(cA) = c^n \det(A)$.

iii) $\det(A) = 0$ se A tem uma linha ou coluna com zeros.

iv) $\det(A) = 0$ se e somente se A é singular.

v) $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

Ex. 6 — Sejam A e B duas matrizes quadradas de ordem n, tais que A e B não tem entradas não-nulas em comum. Em que situação é possível termos $\det A = \det B$?

Ex. 7 — Se sempre tomarmos o módulo do determinante de uma matriz, teremos uma função que dá o volume sem sinal – seria então diferente da função determinante que desenvolvemos. Explique porque esta função não é uma função determinante, e não contradiz, portanto, a unicidade da função determinante.

Ex. 8 — Seja A uma matriz 3×3 com coeficientes em $\mathbb{Q}$. Mostre que se d é um inteiro positivo tal que $d|a_{11}a_{12}a_{13}$, $d|a_{21}a_{22}a_{23}$, $d|a_{31}a_{32}a_{33}$, então $d|\det(A)$.

Ex. 9 — O *permanente* de uma matriz é uma função semelhante ao determinante, com uma diferença: na fórmula de Leibniz, retiramos a multiplicação por $\mathrm{sgn}(\sigma)$. Ou seja, o permanente de A é

$$\mathrm{Perm}(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma_i}.$$

Para que matrizes o permanente é igual ao determinante? (Tente caracterizar as matrizes sem usar permutações.)

Ex. 10 — Demonstre o terema de Sylvester: se A é $n \times k$, e B é $k \times n$, então

$$\det(\mathcal{I}_n + AB) = \det(\mathcal{I}_k + BA).$$

Respostas

Answer (Ex. 1) — Na última matriz, observe que se subtraírmos o dobro da primeira linha à terceira obtemos

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 & -1 & 0 \\ 22 & 12 & 3/2 & 15 & -2 \\ 47 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 3 & 3/2 & 34 & -2 \\ -91 & 16 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se subtraírmos ainda a segunda linha da quarta, teremos

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 & -1 & 0 \\ 22 & 12 & 3/2 & 15 & -2 \\ 47 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & -9 & 0 & 19 & 0 \\ -91 & 16 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Permute linhas e colunas para obter uma matriz triangular.

Answer (Ex. 3) — $\det A' = +d$ se k for par, ou $-d$ se k for ímpar.

Answer (Ex. 5) — (i) Mostre que $\det(E) = \det(E^T)$. (iv) A é produto de matrizes elementares?

Answer (Ex. 7) — Esta função usa módulo, que não é linear. Assim, a função não é multilinear nas colunas da matriz (a propriedade de alternância do determinante é consqueência direta da multilinearidade).

Answer (Ex. 10) — Comece construíndo uma matriz com blocos

$$\begin{pmatrix} \mathcal{I}_n & -A \\ B & \mathcal{I}_k \end{pmatrix}$$

e use decomposição LU em blocos.