Lista 1 - Álgebra Linear

Espaços Vetoriais

1 — Para os conjuntos seguintes, determine se os conjuntos dados são espaços vetoriais reais, se a adição e a multiplicação forem as usuais. Para aqueles que não forem diga quais axiomas de espaços vetoriais não são satisfeitos.

a) O conjunto dos polinômios de grau menor igual a n
b) O conjunto de todas as funções reais tais que $f(0) = f(1)$
c) O conjunto das funções racionais
d) O conjunto das funções tais que $f(0) = 1 + f(1)$
e) O conjunto das funções reais crescentes.
f) O conjunto das funções reais pares.
g) O conjunto das funções reais ímpares.
h) O conjunto das funções contínuas em $[0, 1]$ tais que $\int_0^1 f(x)dx = 0$
i) O conjunto das funções contínuas em $[0, 1]$ tais que $\int_0^1 f(x)dx \geq 0$
j) O conjunto dos vetores (x, y, z) em $\mathbb{R}^3$ tais que $z = 0$
k) O conjunto dos vetores (x, y, z) em $\mathbb{R}^3$ tais que $x = 0$ ou $y = 0$
l) O conjunto dos vetores (x, y, z) em $\mathbb{R}^3$ que são múltiplos de $(1, 2, 3)$
m) O conjunto dos vetores em $\mathbb{R}^3$ que são combinações dos vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$
n) O conjunto das matrizes 2×2 cujo traço é zero
o) O conjunto das matrizes 2×2 cujo determinante é zero
p) O conjunto das matrizes 2×2 que são simétricas,i.e, $A = A^t$
q) O conjunto dos vetores (x, y, z) que satisfaz a equação linear $5x + 2y + 3z = 0$
r) O conjunto dos vetores (x, y, z) que satisfaz a equação linear $a_1x + a_2y + a_3z = 0$
s) O conjunto dos vetores (x, y, z) que satisfazem as equações lineares $5x + 2y = 0$ e $z = 0$
t) O conjunto de pares de números reais em $\mathbb{R}^2$ da forma $(0, y)$.
u) O conjunto de todas as matrizes 2×2 da forma

$$\begin{pmatrix} a & a+b \\ a+b & b \end{pmatrix}$$

v) O conjunto das matrizes 3x3 triangulares superiores, i.e, o conjunto das matrizes da forma:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$$

w) O conjunto das matrizes 3x3 triangulares estritamente superiores, i.e, o conjunto das matrizes da forma:

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

x) $V = \mathbb{R}^3$ com as operações

$$(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \text{ e } \lambda(x_1, x_2, x_3) = (\lambda x_1, x_2, x_3).$$

2 — Seja V um espaço vetorial. Use os axiomas de espaço vetorial para provar que se $v \in V$ e $n \in \mathbb{N}$ então

$$nv = \underbrace{v + \ldots + v}_{n \text{ parcelas}}$$

.

3 — Seja V um espaço vetorial. Sejam $u, v \in V$ não nulos. Prove que v é múltiplo de u se e somente se, u é múltiplo de v.

4 — Em $\mathbb{R}^2$ mantenhamos a definição de produto αv de um número por um vetor mas modifiquemos, de três maneiras diferentes, a definição de soma $u + v$ de vetores $u = (x, y)$ e $v = (x', y')$. Em cada tentativa, dizer quais axiomas de espaço vetorial continuam válidos e quais são violados:

a) $u + v = (x + y', x' + y)$,

b) $u + v = (xx', yy')$,

c) $u + v = (3x + 3x', 5x + 5x')$.

5 — Defina a média $u \star v$ entre dois vetores u, v no espaço vetorial V pondo $u \star v = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v$. Prove que $(u \star v) \star w = u \star (v \star w)$ se e somente se, $u = w$.

6 — Dados os espaços vetoriais V_1, V_2, considere o conjunto $V = V_1 \times V_2$ (produto cartesiano de V_1 por V_2), cujos elementos são os pares ordenados $v = (v_1, v_2)$, com $v_1 \in V_1$ e $v_2 \in V_2$. Defina operações que tornem V um espaço vetorial. Verifique a validade de cada um dos axiomas.