Lista 2- Álgebra Linear

Subespaços Vetoriais, Dependência e Independência Linear e Bases

1 — Seja V um espaço vetorial real. Verifique que V e $\{0\}$ são subespaços de V.

2 — Seja V um espaço vetorial real. Sejam W_1 e W_2 dois subespaços vetoriais de V. Mostre que $W_1 \cap W_2$ é, ainda, um subespaço vetorial de V.

3 — No espaço vetorial real $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sejam:

•$W_1 =$ conjunto das funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que se anulam em todos os pontos do intervalo $[0, 1]$;

•$W_2 =$ conjunto das funções $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que se anulam em todos os pontos do intervalo $[2, 3]$.

Mostre que W_1 e W_2 são subespaços de V e que para todo $v \in V$, $\exists w_1 \in W_1$ e $w_2 \in W_2$ tais que $v = w_1 + w_2$.

4 — Quais dos seguintes subconjuntos são subespaços vetoriais?

a) O conjunto $X \subset \mathbb{R}^3$ formado pelos vetores $v = (x, y, z)$ tais que $z = 3x$ e $x = 2y$.
b) O conjunto $Y \subset \mathbb{R}^3$ formado pelos vetores $v = (x, y, z)$ tais que $xy = 0$.
c) O conjunto $F \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ formado pelas funções f tais que $f(x + 1) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
d) O conjunto $L \subset \mathbb{R}^n$ dos vetores $v = (x, 2x, \ldots, nx)$, onde $x \in \mathbb{R}$ é arbitrário.
e) O conjunto dos vetores $v \in \mathbb{R}^5$ que tem duas ou mais coordenadas nulas.
f) O conjunto dos vetores $v \in \mathbb{R}^3$ que tem pelo menos uma coordenada ≥ 0.
g) O conjunto dos vetores $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $x^3 + 3x = y^2 + 3y$.
h) As funções $Q \in C^1(\mathbb{R})$ tais que $R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = V$ onde R, C e V são constantes conhecidas.

5 — Quais dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^3$?

a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\}$.
b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = z\}$.
c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0\}$.
d) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y \geq 0\}$.

6 — Exiba tres vetores $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ com as seguintes propriedades: nenhum deles é múltiplo do outro, nenhuma das coordenadas é igual a zero e $\mathbb{R}^3$ não é gerado por eles.

7 — Mostre que a matriz $\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -6 & 16 \end{bmatrix}$ pode ser escrita como combinação linear das matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

.

8 — Assinale V(erdadeiro) ou F(also) e justifique sua resposta.

a) O vetor $w = (1, -1, 2)$ pertence ao subespaço gerado por $u = (1, 2, 3)$ e $v = (3, 2, 1)$.

b) Se $X \subset Y$ então $< X > \subset \; < Y >$.

c) Se $< X > \subset < Y >$ então $X \subset Y$.

9 — Para cada uma das seguintes coleções de vetores, determine quando o primeiro vetor é combinação linear dos vetores restantes:

a) $(1, 2, 3), (1, 0, 1), (2, 1, 0) \in \mathbb{R}^3$.

b) $x^3 + 2x^2 + 3x + 1; x^3; x^2 + 3x; x^2 + 1 \in \mathcal{P}_4$.

c) $(1, 3, 5, 7), (1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 1) \in \mathbb{R}^4$

10 — Para cada uma das seguintes coleções de vetores, determine quando os vetores são linearmente independentes:

a) $(1, 2, 3), (1, 0, 1), (2, 1, 0) \in \mathbb{R}^3$.

b) $(1, 2), (3, 5), (-1, 3) \in \mathbb{R}^2$.

c) $(2, 5, -3, 6), (1, 0, 0, 1), (4, 0, 9, 6) \in \mathbb{R}^4$.

d) $x^2 + 1, x + 1, x^2 + x \in \mathcal{P}_3$.

e) $2x^2 + 3, x^2 + 1, 1 \in \mathcal{P}_3$.

f) $2x^2 + 3, x^3 + 1, x^3 + x^2, 1 \in \mathcal{P}_3$.

11 — Seja S o conjunto das funções y satisfazendo a equação

$$2\frac{dy}{dx} + 3y = 0.$$

a) Mostre que o conjunto S é não vazio.

b) Mostre que S é um subespaço do espaço vetorial $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

12 — Para cada um dos conjuntos do problema 5 que sejam subespaços de $\mathbb{R}^3$, encontre uma base para o subespaço, e logo a estenda a uma base de $\mathbb{R}^3$.

13 — Seja P_n o conjunto dos polinômios reais de grau menor igual que n. Para cada um dos itens seguintes seja S o conjunto dos polinômios em P_k satisfazendo a condição dada. Determine se S é um subespaço de P_n Se S for um subspaço calcule a dimensão de S.

a) $p(0) = 0$

b) $p'(0) = 0$

c) $p''(0) = 0$

d) $p'(0) + p(0) = 0$

e) O conjunto dos polinômios de grau igual ou menor que k. (com $k < n$)

14 — Determine se os conjuntos abaixo são subespaços de $M(2,2)$. Em caso afirmativo exiba uma base:

a) $V = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $b = c$

b) $V = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $b = 0 = c$

c) $V = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $a = 0$

d) $V = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $a = 0$

15 — Mostre que os polinômios $1 - t^3, (1 - t)^2, 1 - t$ e 1 geram o espaço dos polinômios de grau menor igual a 3.