Lista 1 - Álgebra Linear

Transformações Lineares II

1 — Determinar um $T \in L(\mathcal{P}_3(\mathbb{R}), \mathcal{P}_2(\mathbb{R}))$ cujo núcleo seja gerado pelos polinômios $1+x^3$ e $1-x^2$.

2 — Encontre uma base para o núcleo e outra para a imagem de $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathcal{R})$ dada por $T(p) = p' + p''$.

3 — Mostre que se U e V são espaços vetoriais de dimensão finita tais que $\dim U = \dim V$ e se $T \in L(U, V)$ então as seguintes condições são equivalentes:

a) T é sobrejetora;

b) T é injetora;

c) T é bijetora;

d) T leva bases de U em bases de V.

4 — a) Seja V um espaço vetorial de dimensão 1. Mostre que qualquer transformação linear não nula $T : U \to V$ é sobrejetora.

b) Utilize a parte a) para mostrar que se $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ não são todos nulos então $H = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n; a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0\}$ tem dimensão $n-1$.

5 — a) Mostre que o espaço das matrizes simétricas reais de ordem n é isomorfo a $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

b) Mostre que o espaço das matrizes anti-simétricas reais de ordem n é isomorfo a $\mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

c) Verifique se $T : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ dada por $T(a, b) = a + (a+b)x$ é um isomorfismo.

6 — Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ linear. Defina $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por

$$T(x, y) = (x, y - f(x)).$$

Mostre que T é um isomorfismo.

7 — a) É $W = \{p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R} : p(-1) = 0)\}$ isomorfo a $\mathbb{R}^2$? Em caso afirmativo forneça uma prova; em casa negativo forneça um contraexemplo.

b) É $W = \{p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) : p(-1) = 0\}$ isomorfo a $\mathbb{R}$? Em caso afirmativo forneça uma prova; em casa negativo forneça um contraexemplo.

8 — Mostre que $W = \{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) : A_{11} = A_{12} \text{ e } A_{22} = A_{21}\}$ é isomorfo a $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$.

9 — a) Seja $T \in L(\mathcal{P}_3(\mathbb{R}), \mathcal{P}_3(\mathbb{R}))$ dada por $T(p) = p'$. Encontre a matriz de T com relação às bases canônicas de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ e $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

b) Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear dada por

$$T(x, y, z) = (x + z, y + z, x + y + 2z).$$

Encontre as matrizes de T com relação à base canônica, C, e com relação à base B formada pelos vetores

$$u = (1, 1, 2), v = (-1, 1, 0), w = (-1, -1, 1).$$

10 — Seja $T \in L(\mathcal{P}_2(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ dada por $T(p) = \int_0^1 p(x)dx$ Encontre as matrizes de T com relação às bases canônicas de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e $\mathbb{R}$.

11 — Determinar o núcleo das transformações lineares abaixo e descreva-os geometricamente.

a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, T(x, y) = y + 2x, (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, T(x, y, z) = z - 2x, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

c) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, T(x, y) = (2x + 2y, x + y), (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, T(x, y, z) = (z - x, z - 2x, z - 3x), (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

12 — Determinar bases para núcleo e para a imagem das transformações que sejam lineares do exercício 1 da lista 7.

13 — Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear tal que

$$T(e_1) = (2, 3, 1), T(e_1 + e_2) = (5, 2, 7) \text{ e } T(e_1 + e_2 + e_3) = (-2, 0, 7).$$

a) Encontre $T(x, y, z)$ para $(x, y, x) \in \mathbb{R}^3$.

b) T é sobrejetora? Justifique sua resposta.

c) T é injetora? Justifique sua resposta.

d) T é bijetora? Justifique sua resposta.

14 — Seja $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ um operador linear tal que

$$(T(p_0))(t) = 1 + t, (T(p_1))(t) = t + t^2 \text{ e } (T(p_2))(t) = 1 + t - t^2,$$

onde $p_i(t) = t^i, i = 0, 1, 2$.

a) Encontre $T(p)$ para $p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

b) T é sobrejetora? Justifique sua resposta.

c) T é injetora? Justifique sua resposta.

d) T é bijetora? Justifique sua resposta.

15 — Determinar as matrizes das transformações lineares do exercício (8) em relação as bases canônicas dos respectivos espaços vetoriais.

16 — Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear cuja matriz em relação à base $\mathcal{B} = \{(1,0),(1,4)\}$ é $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$. Determinar a matriz de T em relação à base canônica de $\mathbb{R}^2$.

17 — Seja $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ uma base de um espaço vetorial V. Se $T, S : V \to V$ são operadores lineares em V tais que

$$T(e_1) = 2e_1 - 3e_2 + e_3, T(e_2) = e_1 + e_2, T(e_3) = e_2 + e_3$$

e

$$S(e_1) = 3e_1 + 2e_2, S(e_2) = e_1 - e_2 - e_3, S(e_3) = e_1 + e_2 - 2e_3.$$

Determine as seguintes matrizes $[T]_{\mathcal{B}}$, $[S]_{\mathcal{B}}$, $[S \circ T]_{\mathcal{B}}$, $\left[S^2 + I\right]_{\mathcal{B}}$ e $\left[T^3 - S^2\right]_{\mathcal{B}}$.

18 — Seja $U = \mathbb{R}^3, V = \mathbb{R}^2, \mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ e $\mathcal{C} = \{(1,0),(0,1)\}$ bases de U e V respectivamente. Encontrar $T \in L(U, V)$ tal que $[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ seja a matriz;

a)
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix},$$

b)
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matriz mudança de base:

19 — Sejam $\mathcal{B}_1 = \{(1,0),(0,1)\}, \mathcal{B}_2 = \{(1,1),(2,3)\}$ e $\mathcal{B}_3 = \{(-1,2),(-2,1)\}$. Exiba as matrizes de mudança de base:

a) da base $\mathcal{B}_2$ para a base $\mathcal{B}_1$.
b) da base $\mathcal{B}_1$ para a base $\mathcal{B}_3$.
c) da base $\mathcal{B}_2$ para a base $\mathcal{B}_3$.

20 — Quais são as coordenadas do vetor $v = (2, -3)$ em relação às bases $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ e $\mathcal{B}_3$?

a) As coordenadas de um vetor w em relação à base $\mathcal{B}_2$ são dadas por:

$$[w]_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Quais são as coordenadas de w em relação às bases $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_3$?

21 — Considere as bases $\mathcal{B}_1 = \{6 + 3x, 10 + 2x\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{2, 3 + 2x\}$ de $\mathcal{P}_1$.

a) Encontre a matriz de mudança da base $\mathcal{B}_2$ para a base $\mathcal{B}_1$ e a matriz de mudança da base $\mathcal{B}_1$ para a base $\mathcal{B}_2$.
b) Encontre as coordenadas de $v = 4 + x$ na base $\mathcal{B}_1$.

22 — Seja V um espaço vetorial real e seja $\mathcal{B}$ uma base ordenada de V. Qual a matriz de mudança da base $\mathcal{B}$ para a base $\mathcal{B}$?

23 — Seja $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Sejam

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

e

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

duas bases de $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Encontre a matriz de mudança da base $\mathcal{B}_2$ para a base $\mathcal{B}_1$.