

Álgebra Linear – Prova Hipotética I

Critérios para avaliação: Clareza, corretude, rigor, e concisão (i) A redação das respostas deve ser clara. (ii) Todo o raciocínio desenvolvido na resposta deve estar correto. (iii) O nível de rigor nas respostas deve ser próximo ao usado nas notas de aula. (iv) As respostas não devem ser mais longas que onecessário.

Ex. 1 — Defina matrizes elementares, e diga como elas podem ser usadas.

Ex. 2 — Seja

$$A = \begin{pmatrix} -20 & 7 & 20 \\ 31 & 8 & -33 \\ 44 & -5 & 41 \end{pmatrix}$$

Usando fatoração LU, resolva os sistemas

a) $A\mathbf{x} = (0, 2, 4)^T$

b) $A\mathbf{x} = (-1, 2, -7)^T$

Ex. 3 — Sejam

$$A = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \right)$$

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

bases ordenadas para $M_{2 \times 2}$.

a) Mostre como representar os elementos de $M_{2 \times 2}$ em \mathbb{R}^n .

b) Determine as matrizes $[\text{id}]_A^B$ e $[\text{id}]_B^A$.

c) Dada $[T]_B^B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, determine $[T]_A^A$

Ex. 4 — Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow M_{2 \times 2}$ dada por

$$T \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} z - y & 7y - 3z - 4x \\ 2y - 2x & 2z - x - y \end{pmatrix}$$

a) Determine uma base para $\ker T$.

b) Determine uma base para $\text{Im } T$.

c) Diga se T é injetiva e se T é sobrejetora. Justifique.

Ex. 5 — Sejam V e W espaços vetoriais de dimensão finita em que $\dim V = \dim W$. Existe transformação linear $T : V \rightarrow W$ injetora e não sobrejetora? Justifique.