Álgebra Linear – Prova III

Critérios para avaliação: Clareza, corretude, rigor, e concisão (i) A redação das respostas deve ser clara. (ii) Todo o raciocínio desenvolvido na resposta deve estar correto. (iii) O nível de rigor nas respostas deve ser próximo ao usado nas notas de aula. (iv) As respostas não devem ser mais longas que onecessário.

Ex. 1 — O que é a base do autoespaço de um operador? E que relação isso tem com o operador ser ou não diagonalizável?

Ex. 2 — Determine a e b tais que: (i) $a, b \neq 0$, (ii) $a = -b$, e (iii) o volume do paralelepípedo gerado pelos vetores $(0, 3a, a)^T$, $(1, 0, b)^T$ e $(1, 1, 2)^T$ em $\mathbb{R}^3$ seja igual a metade da área do paralelogramo gerado pelos vetores $(a, b)^T$ e $(1, 2)^T$ em $\mathbb{R}^2$.
Comentário: O volume do paralelepípedo é

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3a & 0 & 1 \\ a & b & 2 \end{pmatrix} = 3ab - 5a.$$

A área do paralelogramo é

$$\det \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 2 \end{pmatrix} = 2a - b.$$

Queremos $a = -b$, portanto substituímos e temos

$$\begin{aligned} 3(-b)b - 5(-b) &= (2(-b) - b)/2 \\ -3b^2 + 5b &= -b - b/2 \\ -3b^2 + 6b + b/2 &= 0 \\ -3b^2 + 13b/2 &= 0 \end{aligned}$$

Obtemos as soluções $b = 0$ (que não nos serve) e $b = 13/6$. Assim,

$$\begin{aligned} a &= -13/6 \\ b &= +13/6 \end{aligned}$$

Observação: se trocar a ordem dos vetores em um dos lados, poderá chegar a $7/6$. Estritamente falando, teria que considerar o módulo do determinante, mas considero OK se responder de qualquer das formas, dando o volume orientado..

Ex. 3 — Para quais valores de a a matriz abaixo é diagonalizável? Explique.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

Comentário: Precisamos de dois autovetores LI. Calculamos os autovalores. O polinômio característico é

$$\det\left[x\mathcal{I} - \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & a \end{pmatrix}\right] = (x-2)(x-a).$$

Os autovalores de A são, portanto, a e 2. Agora obtemos os autovetores:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$$

Para o autovalor 2, então, temos

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e seus múltiplos.
Agora verificamos o autovalor a:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ay_1 \\ ay_2 \end{pmatrix}$$

obtemos portanto o autovetor

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{a-2}{3} \end{pmatrix}$$

e seus múltiplos.
Como precisamos de dois vetores LI, precisamos que

$$\frac{a-2}{3} \neq 0,$$

para que tenhamos os dois vetores $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ linearmente independentes, e portanto a matriz é diagonalizável para todo $a \neq 2$.

Ex. 4 — No espaço $\mathbb{R}_2[x]$ de polinômios com grau máximo 2, verifique se

$$(a_2x^2 + a_1x + a_0, b_2x^2 + b_1x + b_0) = a_2b_2a_1b_1a_0b_0$$

é produto interno.
Comentário: Não é bilinear:

$$(k\mathbf{u}, \mathbf{w}) \neq k(\mathbf{u}, \mathbf{w}).$$

Mais detalhadamente:

$$\begin{aligned}(ka_2x^2 + ka_1x + ka_0, b_2x^2 + b_1x + b_0) &= (ka_2)(kb_2)(ka_1)b_1a_0b_0 \\ &= k^3(a_2b_2a_1b_1a_0b_0) \\ &\neq k(a_2b_2a_1b_1a_0b_0).\end{aligned}$$

Ex. 5 — No espaço das $C^1[-1,1]$ das funções deriváveis definidas entre -1 e 1 podemos definir o produto interno

$$(f,g) = \int_{-1}^{1} x^2 f(x)g(x)dx.$$

Nesse espaço, e usando esse produto interno, determine a projeção ortogonal da função constante $f(x) = 2$ em e^x.

Comentário: Damos o nome de g à segunda função. A projeção será

$$f - \frac{(f, g)}{(g, g)} g$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} 2 - \frac{(e^x, 2)}{e^x, e^x} e^x &= 2 - \frac{\int_{-1}^{1} x^2 (2) e^x \, dx}{\int_{-1}^{1} x^2 e^x e^x \, dx} e^x \\ &= 2 - \frac{2 \int_{-1}^{1} x^2 e^x \, dx}{\int_{-1}^{1} (x e^x)^2 \, dx} e^x. \end{aligned}$$

Calculamos as integrais:

$$\int x^2 e^x \, dx = (x^2 - 2x + 2) e^x$$
$$\int x^2 e^x e^x \, dx = \frac{(2x^2 - 2x + 1) e^{2x}}{4}$$

No intervalo $[-1, +1]$, portanto,

$$\int_{-1}^{+1} x^2 e^x \, dx = e - 5e^{-1}$$
$$\int_{-1}^{+1} x^2 e^x e^x \, dx = \frac{e^2 - 5e^{-2}}{4}$$

Obtemos assim a projeção:

$$2 - \frac{8e^3 - 40e}{e^4 - 5} e^x$$