Lista 4 - Álgebra Linear

Produtos Internos

1 — Mostre que $\langle x, y\rangle = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 + x_3y_3$ é um produto interno em $\mathbb{R}^3$

2 — Dado $x = (x_1, \ldots, x_n$ e $y = (y_1, \ldots, y_n$ vetores em $\mathbb{R}^n$, Determine se $\langle x, y\rangle$ é um produto interno ou não. E se não for que axiomas falham.

a) $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_iy_i$

b) $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i |y_i|$

c) $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i$

d) $\langle x, y\rangle = |\sum_{i=1}^n x_iy_i|$

3 — Em $\mathbb{R}^4$ determine se $\langle x, y\rangle = x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3 - x_4y_4$ é um produto interno.

4 — Dado S o subespaço de $\mathbb{R}^3$ definido como:

$$S = \{(x, y, z)|x - y + z = 0\}$$

a) Determine uma base ortonormal em relação ao produto interno canônico para esse subespaço de $\mathbb{R}^3$

b) Determine $S^\perp$ em relação ao produto interno usual.

c) Determine uma base ortonormal para S, se considerarmos $\mathbb{R}^3$ com o produto interno:

$$\langle x, y\rangle = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 + x_3y_3$$

d) Determine também $S^\perp$ em relação ao produto interno anterior.

5 — No espaço de todos os polinômios, determine se $\langle x, y\rangle$ é um produto interno ou não. E se não for que axiomas falham.

a) $\langle f, g\rangle == f(1)g(1)$

b) $\langle f, g\rangle == \int_0^1 f(x)g(x)dx$

c) $\langle f, g\rangle == \int_0^1 f(x)g'(x)dx$

d) $\langle f, g\rangle == \int_0^1 f'(x)g'(x)dx$

6 — No espaço de todos os polinômios, seja

$$\langle f, g\rangle = \int_0^\infty e^x f(x)g(x)dx.$$

a) Prove que $\langle x, y\rangle$ é um produto interno

b) Calcule $\langle x, y\rangle$ onde $f(x) = (t+1)^2$ e $g(x) = t^2 - 2$

7 — Para as afirmações a seguir determine se são verdadeiras ou falsas. Demonstre as verdadeiras e em caso contrário forneça contraexemplos.

a) $\langle x, y\rangle = 0$ se e somente se $\|x+y\| = \|x-y\|$

b) $\langle x, y\rangle = 0$ se e somente se $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

c) $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$

8 — Considere o espaço vetorial real $\mathbb{R}^4$ munido do produto interno usual. Seja U o subespaço gerado pelos elementos $u1 = (1, 1, 1, 1)$ e $u_2 = (-1, 1, -11)$. Pede-se:

a) Mostre que $(2, 1, 3, 1)$ não pertence a U.

b) Determine a melhor aproximação do elemento $v = (2, 1, 3, 1)$ no subespaço U.

c) Determine um subespaço W de modo que $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$. Justifique sua resposta

9 — No espaço das matrizes 2×2 considere:

$$\langle A, B\rangle = Tr(AB^t)$$

a) Prove que $\langle A, B\rangle$ definido acima é um produto interno.

b) Utilizando o método de ortogonalização de Gram-Schmidt construa uma base ortonormal para esse espaço partindo da base:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

10 — No espaço dos polinômios reais considere o produto interno dado por

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt,$$

seja $f_n(t) = t^n$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$. Prove que as as funções

$$f_0(t) = 1 \quad f_1(t) = \sqrt{3}(2t-1) \quad f_2(t) = \sqrt{5}(6t^2-6t+1)$$

formam um conjunto ortogonal para o subespaço gerado por f_0, f_1, f_2.

11 — No espaço real $C(0, 2)$, com o produto

$$\langle f, g \rangle = \int_0^2 f(t)g(t)dt,$$

mostre que o polinômio constante mais próxima a $f(x) = e^x$ é a função $g = \frac{1}{2}(e^2 - 1)$. Calcule a distância entre f e g.

12 — Considere o espaço vetorial R^4 munido do produto interno usual. Seja U o subespaço gerado pelos elementos $u_1 = (1; -1; 1; 1)$ e $u2 = (1; 2; 0; 1)$.

a) Determine uma base para o subespaço $U^{\perp}$.

b) Calcule a projeção ortogonal do elemento $u = (2; 1; 1; -1)$ no subespaço U

13 — Considere o espaço vetorial $P_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt$$

a) A partir da base canônica $1, t, t^2$ do espaço vetorial$P_2(\mathbb{R})$, construir uma base ortogonal para esse espaço.

14 — Considere o espaço vetorial real $C([-1, 1])$ munido do produto interno usual. Determine o polinômio $p(x) = a + bx$, mais próximo da função

$$f(x) = sin(x)$$

Dê uma interpretação geométrica para o polinômio $p(x)$.