Álgebra Linear – Prova (2^a)

Critérios para avaliação: Clareza, corretude, rigor, e concisão. (i) A redação das respostas deve ser clara. (ii) Todo o raciocínio desenvolvido na resposta deve estar correto. (iii) O nível de rigor nas respostas deve ser próximo ao usado nas notas de aula e bibliografia básica. (iv) As respostas não devem ser mais longas que o necessário.

Atenção: nos exercícios onde há subitens, faça apenas <u>um</u> deles, <u>indicando qual escolheu</u> – ou seja, da questão 2 faça apenas um dentre (a), (b), (c). Da questão 3 faça apenas (a) ou (b).

Ex. 1 — Sejam f e g duas transformações lineares tais que $f \circ g$ seja bem definida. Quais são o posto e a nulidade de $f \circ g$ em função do posto e nulidade de f e de g?
Comentário: o posto de $f \circ g$ é a dimensão da imagem de $f \circ g$. Em espaços de dimensão finita, se representarmos f e g por matrizes, o posto delas será o posto de suas matrizes. Se f tem k colunas LI e g tem m colunas LI, a quantidade de colunas LI na matriz de $f \circ g$ será menor ou igual a k e a m. É tudo que podemos dizer. Pode inclusive ser zero:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(Há zero colunas LI, porque o vetor zero sozinho não é LI)
A nulidade de $f \circ g$ é a dimensão do seu domínio (que é o mesmo que a dimensão do domínio de f) menos o posto de $f \circ g$. Assim, a nulidade é *maior ou igual* que k e m (o posto de f e o de g).

Ex. 2 —

a) Resolva o sistema d equações diferenciais (descreva $y_1(t)$ em função de $y_1(0)$ e $y_2(t)$ em função de $y_2(0)$).

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 + y_2 \\ y_2' &= 399y_1 - y_2 \end{aligned}$$

b) Resolva o sistema de equações de diferenças.

$$\begin{aligned} y_1(t) &= y_1(t-1) + y_2(t-1) \\ y_2(t) &= 99y_1(t-1) - y_2(t-1) \end{aligned}$$

c) Quando possível, calcule A^k. Pode deixar a resposta como produto de três matrizes. Se não conseguir, explique porque.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 30 \\ 1/3 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & e^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Comentário:
(a) O sistema é $A\mathbf{y} = \mathbf{y}'$, com

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 399 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -21 & 19 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -20 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} \frac{1}{40} \begin{pmatrix} 19 & -1 \\ 21 & 1 \end{pmatrix}$$

A solução é $\mathbf{y} = e^{At}$, logo

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}(t) &= e^{At} \\
&= Pe^{Dt}P^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -21 & 19 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-20t} & 0 \\ 0 & e^{20t} \end{pmatrix} \frac{1}{40} \begin{pmatrix} 19 & -1 \\ 21 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{40e^{20t}} \begin{pmatrix} (21e^{40t} + 19)y_1 + (e^{40t} - 1)y_2 \\ (399e^{40t} - 399)y_1 + (19e^{40t} + 21)y_2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(b) O sistema é $A\mathbf{y}(t-1) = \mathbf{y}(t)$, com

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 99 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -11 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 9 & -111 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Seja $\mathbf{w}(t)$ o vetor $\mathbf{y}(t)$ na base onde A é diagonal. Então

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}(t) &= P^{-1}\mathbf{y}(t) \\
\mathbf{y}(t) &= P\mathbf{w}(t)
\end{aligned}$$

O sistema é

$$D\mathbf{w}(t+1) = \mathbf{w}(t)$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
w_1(t) &= -10w_1(t-1) \\
w_2(t) &= +10w_1(t-1)
\end{aligned}$$

A solução é, portanto,

$$\begin{aligned}
w_1(t) &= -10^t w_1(0) \\
w_2(t) &= +10^t w_2(0)
\end{aligned}$$

(c) A: não é diagonalizável (só conseguimos um autovetor LI).
B: temos

$$\begin{aligned}
B^k &= \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1/15 & 1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 5 & -30 \\ 2 & 30 \end{pmatrix} \right]^k \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1/15 & 1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}^k \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 5 & -30 \\ 2 & 30 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1/15 & 1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3^k & 0 \\ 0 & 4^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -30 \\ 2 & 30 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

C: Não é diaginalizável (só podemos obter um autovetor LI)

D:

$$\begin{aligned} D^k &= \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1/e & 1/e \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -e & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -e \\ 1 & e \end{pmatrix}\right]^k \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1/e & 1/e \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -e & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}^k\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -e \\ 1 & e \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1/e & 1/e \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -e^k & 0 \\ 0 & e^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -e \\ 1 & e \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ex. 3 —

a) Diga se são produtos internos:

- No espaço de funções contínuas $C[0,1]$, $< f, g >= f(0)g(1)$.
- No espaço de matrizes $\mathcal{M}_{n\times n}$, $< A, B >= (\mathrm{Tr}(A) - \mathrm{Tr}(B))^2$

b) Usando o produto de Frobenius, calcule a distância entre as matrizes A e B, e entre as matrizes C e D mostradas na questão 2, item (c).
Comentário: (a) Primeiro item: NÃO! – porque não é comutativo: $f(0)g(1) \neq g(0)f(1)$.
Segundo item: Claramente vale a positividade, porque é um quadrado, e também $(\mathrm{Tr}(ZERO) - \mathrm{Tr}(ZERO))^2 = 0$.
É comutativo: $(\mathrm{Tr}(A) - \mathrm{Tr}(B))^2 = (\mathrm{Tr}(B) - \mathrm{Tr}(A))^2$.
Mas NÃO é Bilinear:

$$\begin{aligned} (\mathrm{Tr}(kA) - \mathrm{Tr}(B))^2 &= (k\,\mathrm{Tr}(A) - \mathrm{Tr}(B))^2 \\ &= k^2\,\mathrm{Tr}(A)^2 - 2k\,\mathrm{Tr}(A)\,\mathrm{Tr}(B) + \mathrm{Tr}(B)^2 \\ &\neq k(\mathrm{Tr}(A)^2 - 2\,\mathrm{Tr}(A)\,\mathrm{Tr}(B) + \mathrm{Tr}(B)^2. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} d(A,B) &= ||A - B|| \\ &= \left|\left|\begin{pmatrix} 4 & -27 \\ -10/3 & -5 \end{pmatrix}\right|\right| \\ &= \sqrt{4^2 + 27^2 + (10/3)^2 + 5^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(C,D) &= ||C - D|| \\ &= \left|\left|\begin{pmatrix} 0 & -e^2 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}\right|\right| \\ &= \sqrt{e^4 + 36}. \end{aligned}$$