Álgebra Linear – Prova (6^a)

Critérios para avaliação: Clareza, corretude, rigor, e concisão. (i) A redação das respostas deve ser clara. (ii) Todo o raciocínio desenvolvido na resposta deve estar correto. (iii) O nível de rigor nas respostas deve ser próximo ao usado nas notas de aula e bibliografia básica. (iv) As respostas não devem ser mais longas que o necessário.

Atenção: nos exercícios onde há subitens, faça apenas um deles, indicando qual escolheu – ou seja, da questão 2 faça apenas um dentre (a), (b), (c). Da questão 3 faça apenas (a) ou (b).

Ex. 1 — Explique o que é posto, nulidade, núcleo e imagem de uma transformação linear. O que isto significaria, por exemplo, para uma transformação de $\mathbb{R}_4[x]$ em $\mathcal{M}_{5\times 8}$?
Comentário: veja nas notas de aula as definições. Para o exemplo dado no enunciado, temos como imagem o conjunto de matrizes M tais que existe algum polinômio em $\mathbb{R}_4[x]$ com $T(p) = M$. O núcleo é o conjunto dos polinômios em $\mathbb{R}_4[x]$ tais que $T(p)$ é a matriz zero. O posto é a dimensão da imagem – ou seja, do conjunto de matrizes que mencionamos. A nulidade é a dimensão do núcleo – que é o conjunto de polinômios que também mencionamos.

Ex. 2 —

a) Obtenha a solução para o sistema de equações diferenciais (descreva $y_1(t)$ em função de $y_1(0)$ e $y_2(t)$ em função de $y_2(0)$).

$$
\begin{aligned}
y_1' &= 2y_1 + \frac{y_2}{2} \\
y_2' &= 8y_1 - y_2
\end{aligned}
$$

b) Resolva o sistema de equações de diferenças.

$$
\begin{aligned}
y_1(t) &= -y_1(t-1) + \frac{y_2(t-1)}{2} \\
y_2(t) &= \frac{y_1(t-1)}{2} - y_2(t-1)
\end{aligned}
$$

c) Diga quais matrizes são diagonalizáveis, e explique porque. Para as que são diagonalizáveis, mostre a matriz de mudança de base P e a diagonal D.

$$
A = \begin{pmatrix} 3 & 1/3 \\ 15 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & \pi \\ \pi & 0 \end{pmatrix}
$$

Comentário:
(a) O sistema é $A\mathbf{y} = \mathbf{y}'$, com

$$
A = \begin{pmatrix} 2 & 1/2 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}
$$

Temos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

A solução é

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= e^{tA} = Pe^{tD}P^{-1} \\ &= A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{10e^{2t}} \begin{pmatrix} (8e^{5t}+2)y_1 + (e^{5t}-1)y_2 \\ (16e^{5t}-16)y_1 + (2e^{5t}+8)y_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(b) Nenhum aluno tentou, por isso não incluo a resolução aqui.
(c) A: autovalores -2 e 4, autovetores gerados por $(1,-15)^T$ e $(1,3)^T$.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -15 & 3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

B: autovalor 0 com multiplicidade algébrica dois. Autovetores gerados por $(1,1)$. Não é diagonalizável, porque não podemos obter mais que um autovetor LI.
C: autovalores $0, 1$. Autovetores gerados por $(0,1)^T$, $(1,0)$.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D: autovalores $\pm\pi$. Autovetores gerados por $(1,-1)^T$, $(1,1)^T$.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} \pi & 0 \\ 0 & -\pi \end{pmatrix}$$

Ex. 3 —

a) Diga se são produtos internos:

- No espaço de funções contínuas $C[0,1]$, $< f, g >= 2f(0) + 3g(0)$.
- No espaço de matrizes $\mathcal{M}_{n\times n}$, $< A, B >= \mathrm{Tr}(A)\,\mathrm{Tr}(B)$

b) Calcule o ângulo entre f e h, e entre g e h.

$$\begin{aligned} f(x) &= 1/x \\ g(x) &= e^x \\ h(x) &= x+1 \end{aligned}$$

Comentário: (a) Primeiro item: NÃO! Positividade: $< f, f >$ deveria ser ≥ 0, mas $2f(0) + 3f(0)$ pode ser negativo.
Segundo item: SIM!
Positividade:

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(0)\,\mathrm{Tr}(0) &= 0 \\ \mathrm{Tr}(A)\,\mathrm{Tr}(A) &= \mathrm{Tr}(A)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Comutatividade:

$$\mathrm{Tr}(A)\,\mathrm{Tr}(B) = \mathrm{Tr}(B)\,\mathrm{Tr}(A)$$

Bilinearidade:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(A + C, B) &= \left(\sum a_{ii} + c_{ii}\right) \mathrm{Tr}(B) \\
&= \sum (a_{ii} + c_{ii}) \, \mathrm{Tr}(B) \\
&= \sum a_{ii} \, \mathrm{Tr}(B) + \sum c_{ii} \, \mathrm{Tr}(B) \\
&= \mathrm{Tr}(B) \sum a_{ii} + \mathrm{Tr}(B) \sum c_{ii} \\
&= \mathrm{Tr}(A) \, \mathrm{Tr}(B) + \mathrm{Tr}(C) \, \mathrm{Tr}(B).
\end{aligned}
$$

e também,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(kA, B) &= \left(\sum k a_{ii}\right) \mathrm{Tr}(B) \\
&= k \left(\sum k a_{ii}\right) \mathrm{Tr}(B) \\
&= k \, \mathrm{Tr}(A) \, \mathrm{Tr}(B).
\end{aligned}
$$

(b) Primeiro, entre f e h – a integral $\int_0^1 x^{-1} \, dx$ não existe, e $1/x$ **não** pertence a $C[0, 1]$. Segundo, entre g e h:

$$
\begin{aligned}
\theta &= \arccos \frac{< e^x, x + 1 >}{||e^x|| \ \ ||x + 1||} \\
&= \arccos \frac{\int_0^1 e^x (x + 1) dx}{\sqrt{\int_0^1 (e^x)^2 dx \int_0^1 (x + 1)^2 dx}} \\
&= \arccos \frac{e}{\sqrt{\frac{e^2 - 1}{2} \ \ 7/3}} \\
&= \arccos \frac{e\sqrt{6}}{\sqrt{7(e^2 - 1)}}.
\end{aligned}
$$