

Álgebra Linear – Prova Hipotética

CrITÉRIOS para avaliação: Clareza, corretude, rigor, e concisão. (i) A redação das respostas deve ser clara. (ii) Todo o raciocínio desenvolvido na resposta deve estar correto. (iii) O nível de rigor nas respostas deve ser próximo ao usado nas notas de aula e bibliografia básica. (iv) As respostas não devem ser mais longas que o necessário.

Atenção: Não há garantia de que os tópicos sejam estes, ou que as questões sejam “muito parecidas, quase iguais” a estas. Esta prova funciona apenas como uma última lista de exercícios, e ajuda a entender o nível de dificuldade da prova. Pode ser que o conteúdo seja diferente (dentro do que vimos em aula), ou que as questões sejam um pouco diferentes (dentro do que exercitamos em aula e nas listas).

Ex. 1 — Diga o que é uma projeção ortogonal de um vetor em outro.

Comentário: haverá uma pergunta conceitual na prova.

Ex. 2 — Obtenha a solução para o sistema de equações diferenciais.

$$\begin{aligned}y_1' &= y_1 + y_2 \\ y_2' &= 4y_1 - 2y_2\end{aligned}$$

Comentário: O sistema é

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y},$$

com

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Os autovalores e autovetores são

$$\begin{aligned}-3 &: (1, -4)^T \\ 2 &: (1, 1)^T\end{aligned}$$

Assim, temos $D = P^{-1}AP$, com

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

A solução para $A\mathbf{x} = \mathbf{x}'$ é

$$e^{tA}\mathbf{x}(0)$$

A matrix e^{tA} é

$$e^{tA} = P^{-1}e^{tD}P = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-3t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Basta multiplicar as matrizes:

$$P^{-1}e^{tD}Py(0) = \frac{1}{5e^{3t}} \begin{pmatrix} -(e^{5t} - 1)x_2(0) - (-4e^{5t} + 15e^{3t} + 4)x_1(0) \\ (e^{5t} + 5e^{3t} + 4)x_2(0) + (-4e^{5t} - 15e^{3t} + 4)x_1(0) \end{pmatrix}$$

Ex. 3 — Diga se são produtos internos:

i) Em $\mathbb{R}^n$, $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \theta \mathbf{x}^T \mathbf{y}$, onde θ é o ângulo entre $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

ii) Em $C^0[0, 1]$, $\langle f, g \rangle = f(1/2)g(1/2)$.

Comentário: (i) comutatividade: ok, porque $\theta \mathbf{x}^T \mathbf{y}$ é o mesmo que $\theta \mathbf{y}^T \mathbf{x}$. (O ângulo não depende da ordem, e $\mathbf{x}^T \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \mathbf{x}$).

positividade: o ângulo fica em $[0, 2\pi)$, portanto é ≥ 0 . Sabemos que $\mathbf{x}^T \mathbf{x}$ também é ≥ 0 , portanto, $\theta \mathbf{x}^T \mathbf{y}$ é ≥ 0 . Além disso, $\mathbf{0} \cdot \mathbf{0} = 0$, portanto $\theta \mathbf{0} \cdot \mathbf{0} = 0$.

linearidade: ok também:

$$\langle a\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \theta(a\mathbf{x}^T)\mathbf{y} = a\theta\mathbf{x}^T\mathbf{y} = a\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x} + \mathbf{w}, \mathbf{y} \rangle &= \theta(\mathbf{x} + \mathbf{w})^T \mathbf{y} \\ &= (\theta\mathbf{x}^T + \theta\mathbf{w}^T) \mathbf{y} \\ &= \theta\mathbf{x}^T \mathbf{y} + \theta\mathbf{w}^T \mathbf{y} \\ &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{w}, \mathbf{y} \rangle \end{aligned}$$

Portanto sim, é produto interno!

(ii) comutatividade: ok, porque $f(x)g(x) = g(x)f(x)$. positividade: ok, porque $\text{zero}(1/2)\text{zero}(1/2) = 0 \cdot 0 = 0$, e $f(1/2)f(1/2) = [f(1/2)]^2 \geq 0$. linearidade: ok,

$$\langle af(x), g(x) \rangle = af(1/2), g(1/2) \rangle = a\langle f, g \rangle.$$

$$\begin{aligned} \langle f + h, g \rangle &= [f(1/2) + h(1/2)]g(1/2) \\ &= f(1/2)g(1/2) + h(1/2)g(1/2) \\ &= \langle f, g \rangle + \langle h, g \rangle \end{aligned}$$