Álgebra Linear – Teste I

Critérios para avaliação: Clareza, corretude, rigor, e concisão (i) A redação das respostas deve ser clara. (ii) Todo o raciocínio desenvolvido na resposta deve estar correto. (iii) O nível de rigor nas respostas deve ser próximo ao usado nas notas de aula e bibliografia básica. (iv) As respostas não devem ser mais longas que o necessário.

Ex. 1 — Uma função f é periódica com período t se existe t tal que $f(x) = f(t + x)$, para todo x. Dado um certo k *fixo*, o conjunto das funções periódicas com período k, com as operações usuais, é subespaço do conjunto de todas as funções reais? Porque?
Comentário: Como este conjunto é um subconjunto das funções reais, só precisamos mostrar que:

i) O zero (neutro aditivo das funções) está no conjunto;

ii) A soma e multiplicação por escalar resultam em elemento deste conjunto (em uma função de mesmo período).

(i) Mostramos que a função constante zero,

$$z(x) = 0,$$

é periódica: para todo t,

$$z(x + t) = 0 = z(x).$$

Muita gente errou aqui, apenas mencionando que "existe um neutro aditivo", ou falando da função zero, sem mostrar que ela é periódica.

(ii) Sejam f e g periódicas com período t. Então, a função cf é periódica:

$$(cf)(x + t) = c(f(x + t)) = c(f(x)) = (cf)(x).$$

Além disso, a soma de funções periódicas de mesmo período é periódica com o período igual ao das outras:

$$(f + g)(x + t) = f(x + t) + g(x + t) = f(x) + g(x) = (f + g)(x).$$

Assim, trata-se de fato de um subespaço.

Ex. 2 — O vetor $(1, 3, 5)^T$ pertence ao espaço gerado por $\{(2, 2, 4)^T, (0, 1, 0)^T\}$? Porque?
Comentário: se $(1, 3, 5)^T$ pertencesse ao espaço descrito, seria possível descrevê-lo como combianção linear dos outros:

$$\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},$$

o que implicaria que a e b são as soluções de

$$\begin{cases} 2a & & = 1 \\ 2a & +b & = 3 \\ 4a & & = 5 \end{cases}$$

Este sistema, no entanto, não tem solução, portanto o vetor dado *não* pertence ao espaço gerado pelos outros dois.