Álgebra Linear – Teste IV

Critérios para avaliação: Clareza, corretude, rigor, e concisão (i) A redação das respostas deve ser clara. (ii) Todo o raciocínio desenvolvido na resposta deve estar correto. (iii) O nível de rigor nas respostas deve ser próximo ao usado nas notas de aula e bibliografia básica. (iv) As respostas não devem ser mais longas que o necessário.

Ex. 1 — considere o sistema de equações $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, com

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -2a \\ 3 & 0 & -a \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

determine todos os valores de a para os quais o sistema *não* tem solução.
Comentário: Para que o sistema não tenha solução, a matiz de coeficientes não pode ter inversam, portanto queremos $\det A = 0$. Como

$$\det A = (-3a^2) - (-9) = -3a^2 + 9,$$

só precisamos resolver $-3a^2 + 9 = 0$, obtendo

$$a = \pm\sqrt{3}.$$

Ex. 2 — Calcule os determinantes a seguir. A, B, C são matrizes de ordem $n > 4$, e k é um escalar. O determinante de C é 2.

i) $\det\left[E_{1,3}E_{2,4}E_{1(2)}E_{2,3}A^2B(5C)\right]$

ii) $\det\left[E_{2(3,4)}A(3B)C\right]$

iii) $\det\left[E_{2(2)}C(kB)E_{2(3)}(2A^{-1})\right]$

A seguir há um lembrete de notação: as operações elementares são

- Multiplicação de uma linha i por uma constante k, denotada $E_{i(k)}$;
- Permutação de duas linhas i e j, representada por $E_{i,j}$;
- Soma de um múltiplo de uma linha a outra linha, denotada $E_{i(k,j)}$.

Comentário Sejam a e b os determinantes de a e b. Então os valores são

i) $(-1)(-1)(2)(-1)a^2b(5^n)(2) = -4(5^n)a^2b$, ou $-4(5^n)\det A^2 \det B$.

ii) $a(3^n b)(2) = 3^n 2ab$, ou $3^n 2 \det A \det B$.

iii) $(2)(2)k^n b(3)2^n a^{-1} = 12k^n b(a^{-1})$, ou $12(2k)^n \det B \det(A^{-1})$