

Álgebra Linear – Teste V

Critérios para avaliação: Clareza, corretude, rigor, e concisão (i) A redação das respostas deve ser clara. (ii) Todo o raciocínio desenvolvido na resposta deve estar correto. (iii) O nível de rigor nas respostas deve ser próximo ao usado nas notas de aula e bibliografia básica. (iv) As respostas não devem ser mais longas que o necessário.

Ex. 1 — Diagonalize a matriz a seguir (não basta mostrar a diagonal apenas, mostre todas as matrizes envolvidas na diagonalização).

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Comentário: Os autovalores e autovetores da matriz são:

$$\begin{aligned} &1 - 2\sqrt{2}, (1, 1 - \sqrt{2})^T \\ &1 + 2\sqrt{2}, (1, 1 + \sqrt{2})^T. \end{aligned}$$

As matrizes de mudança de base são, portanto,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 - \sqrt{2} & 1 + \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = 2\sqrt{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} + 1 & -1 \\ \sqrt{2} - 1 & 1 \end{pmatrix}$$

E temos

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 + 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Ex. 2 — Considere o espaço das funções contínuas no intervalo $[-\pi, +\pi]$. Sejam $f(x) = x$ e $g(x) = \text{sen}(x)$ definidas neste intervalo. Calcule a projeção ortogonal de f em g , ou seja,

$$\text{Proj}_g(f),$$

usando o produto interno usual para funções.

Comentário: Fácil:

$$\begin{aligned} \text{Proj}_g(f) &= \frac{\langle f, g \rangle}{\langle g, g \rangle} g \\ &= \frac{\int_{-\pi}^{\pi} x \text{sen}(x) dx}{\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}^2(x) dx} \text{sen}(x) \\ &= \frac{2\pi}{\pi} \text{sen}(x) \\ &= 2 \text{sen}(x). \end{aligned}$$