Álgebra Linear – Prova I

> **Critérios para avaliação:** Clareza, corretude, rigor, e concisão (i) A redação das respostas deve ser clara. (ii) Todo o raciocínio desenvolvido na resposta deve estar correto. (iii) O nível de rigor nas respostas deve ser próximo ao usado nas notas de aula e bibliografia básica. (iv) As respostas não devem ser mais longas que o necessário.

Ex. 1 — Seja $\mathcal{F}$ o espaço vetorial das funções reais (ou seja, das funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$), e W o subconjunto das funções $g \in \mathcal{F}$ tais que $|g(x)| \leq 1$ para todo $-1 \leq x \leq +1$. Determine se W é subespaço de $\mathcal{F}$
Comentário: Não é! As duas funções constantes

$$f(x) = 1, \qquad g(x) = 1/2$$

pertencem a W, mas

$$(f + g)(x) = 1 + 1/2 \ > 1,$$

portanto a soma das duas não está em W, que não pode ser espaço vetorial.

Ex. 2 — Quais destes subconjuntos são subespaços?

a) $\{(x, y, z)^T \ : \ x + y = z\}$ (subespaço de $\mathbb{R}^3$?)

b) polinômios com coeficientes de valor par (subespaço de $\mathbb{R}_n[x]$?)

c) o conjunto de vetores em $\mathbb{R}^2$ que tem coordenada maior ou igual a zero, e outra menor ou igual a zero

d) o conjunto de vetores que estão no primeiro ou no terceiro quadrantes (subespaço de $\mathbb{R}^2$?)

Comentário: (a) Sim! Não mostramos nada sobre as operações, porque sabemos que $\mathbb{R}^3$ já é espaço com elas.

i) O vetor zero é da forma pedida, porque $0 + 0 = 0$.

ii) Seja $(x, y, x+y)^T$. Multiplicando por $k \in \mathbb{R}$, temos $k(x, y, x+y)^T = (kx, ky, k(x+y)^T$, que também pertence ao conjunto dado.

iii) A soma é fechada:

$$(x, y, x + y)^T + (a, b, a + b)^T = \big(a + x, b + y, (a + b) + (x + y)\big)^T$$

(b) Não! O polinômio $6x$ multiplicado pela constante $1/2$ resulta em $3x$, com coeficiente ímpar para x.
(c) Não: o vetor $(2, -3)$ está no conjunto dado, mas se o multiplicarmos por -1 a primeira coordenada será positiva.
(d) Não: somando um vetor do primeiro quadrante com um do terceiro podemos obter um no segundo ou no quarto quadrantes.

Ex. 3 — Qual é a dimensão dos espaços vetoriais:

a) das matrizes quadradas de ordem n, triangulares superiores?

b) das matrizes quadradas de ordem n, diagonais, e com traço[1] zero?

[1] Traço é a somatória dos elementos da diagonal.

Comentário: (a) A base é

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & 0 & \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & 0 & \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & & 1 \\ 0 & 0 & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & 0 & \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & 0 & \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & & & 1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & 0 & \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix},$$

$$\vdots$$

$$\left. \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & 0 & \\ 0 & 0 & \cdots & & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

tendo uma matriz para cada posição na rgião triangular superior. Assim, temos

$$\begin{array}{rl} n & \text{na primeira linha} \\ n-1 & \text{na egunda linha} \\ n-2 & \text{na terceira linha} \\ \vdots & \\ 1 & \text{na última linha} \end{array}$$

Logo a dimensão é $1 + 2 + \cdots + n$, ou

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

(b) $n - 1$. A base é

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & 0 & \\ 0 & 0 & \cdots & & \mathbf{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & 0 & \\ 0 & 0 & \cdots & & \mathbf{-1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & \\ 0 & 0 & \cdots & & \mathbf{-1} \end{pmatrix} \right\},$$

com $n - 1$ matrizes (o último elemento é fixo para que possamos ter o traço igual a zero).

Ex. 4 — Considere o subespaço de $\mathbb{R}^3$,

$$V = \left\{ (a, b, a + b)^T \ : \ a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Seja

$$W = \left\{ (x, x, x)^T \ : \ x \in \mathbb{R} \right\}$$

Determine se W é complemento de V (ou seja, se $\mathbb{R}^3 = V + W$).

Comentário: A base para o primeiro subespaço é

$$B_1 = \left\{ (1,0,1)^T,\ (0,1,1)^T \right\}$$

A base para o segundo é

$$B_2 = \left\{ (1,1,1)^T \right\}$$

Como os vetores das duas bases formam o conjunto

$$B_1 \cup B_2 = \left\{ (1,0,1)^T,\ (0,1,1)^T,\ (1,1,1)^T \right\},$$

que é LI, o segundo subespaço é complemento do primeiro: todo vetor de $\mathbb{R}^3$ pode ser escrito como combinação linear desta última base,

$$\underbrace{a(1,0,1)^T + b(0,1,1)^T}_{\in V} + \underbrace{c(1,1,1)^T}_{\in W},$$

ou seja, como a soma de um vetor de V com um de W.