Álgebra Linear – Prova I

Critérios para avaliação: Clareza, corretude, rigor, e concisão (i) A redação das respostas deve ser clara. (ii) Todo o raciocínio desenvolvido na resposta deve estar correto. (iii) O nível de rigor nas respostas deve ser próximo ao usado nas notas de aula. (iv) As respostas não devem ser mais longas que onecessário.

Ex. 1 — Explique o que é a dimensão de um espaço vetorial, e diga qual é a relação da dimensão de um espaço com as coordenadas usadas para representar os vetores nesse espaço.
Comentário: dimensão de um espaço vetorial é a quantidade de vetores em qualquer uma de suas bases.
A relação entre dimensão e coordenadas é esta: cada vetor de um espaço V de n dimensões é representado como combinação linear de n vetores da base – e cada coeficiente desta combinação é uma coordenada. Assim, com n dimensões temos n coordenadas.

Ex. 2 — Complete o conjunto de vetores a seguir para que passe a ser uma base para o espaço de polinômios com grau máximo quatro tais que $p(0) = 0$.

$$B = \left\{ x^3 + x, x^2 + x^3, x^2 + x^4 \right\}$$

Comentário: como se pede grau máximo 4 com $p(0) = 0$, temos o espaço dos polinômios da forma $a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x$, <u>sem</u> o termo constante – são quatro coeficientes.
Se representarmos os vetores de B em $\mathbb{R}^4$, temos

$$\begin{aligned} x^3 + x &\leftrightarrow (0, 1, 0, 1) \\ x^2 + x^3 &\leftrightarrow (0, 1, 1, 0) \\ x^2 + x^4 &\leftrightarrow (1, 0, 1, 0) \end{aligned}$$

Mostramos que os vetores são L.I., de duas maneiras:
(1) (Força bruta, porque são apenas três vetores) A primeira linha não é combinação linear das outras, porque o 1 em sua última posição não pode ser combinação linear de dois zeros. A mesma observação vale para o 1 na primeira posição do último vetor. Pode-se verificar facilmente também que o vetor do meio não é combinação dos outros dois, porque os zeros na priemira e última posição forçariam coeficientes zero. Assim, os vetores são L.I.
(2) (Resolvendo o sistema) O sistema

$$\begin{cases} ax_2 + ax_4 = 0 \\ bx_2 + bx_3 = 0 \\ cx_1 + cx_3 = 0 \end{cases}$$

tem solução apenas com $a = b = c = 0$, e portanto o conjunto é L.I.

No entanto, o conjunto tem apenas tres vetores. Para formar uma base para $\mathbb{R}^4$ (e consequentemente para o espaço de polinômios pedido) precisamos de mais um.
Adicionando o vetor $(0,1,0,0)$ o conjunto terá quatro vetores L.I., pois o sistema

$$\begin{cases} ax_2 + ax_4 = 0 \\ bx_2 + bx_3 = 0 \\ cx_1 + cx_3 = 0 \\ dx_2 = 0 \end{cases}$$

tem solução apenas com $a = b = c = d = 0$, e portanto o conjunto é L.I.

Ex. 3 — Quais funções são transformações lineares? Para as que forem lineares, determine núcleo, imagem, posto e nulidade.

a) $T_1(x, y) = (\text{sen}(x), y)$

b) $T_2(x, y) = (x + 1, y + 1)$

c) $T_3(x, y) = (x, 2x, 3y, y)$

Comentário: (a) T_1 não é linear, porque $\text{sen}(x + a) \neq \text{sen}(x) + \text{sen}(a)$. (b) T_2 não é linear, porque $T_2(\mathbf{0}) = (0 + 1, 0 + 1)$, que é diferente de zero (e uma transformação linear sempre deve levar zero em zero). (c) T_3 é linear, porque

$$\begin{aligned} T[k(a, b)] &= T[(ka, kb)] \\ &= (ka, 2ka, 3kb, kb) \\ &= k(a, 2a, 3b, b) \\ &= kT[(a, b)], \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} T[(a, b) + (q, r)] &= T[(a + q, b + r)] \\ &= (a + q, 2a + 2q, 3b + 3r, b + r) \\ &= (a, 2a, 3b, b) + (q, 2q, 3r, r) \\ &= T[(a, b)] + T[(q, r)]. \end{aligned}$$

O núcleo de T_3 contém todo (x, y) com $x = 2x = y = 3y = 0$ – ou seja, apenas $(0, 0)$.
A imagem de T_3 é composta dos vetores da forma $(a, 2a, 3b, b)$, e portanto a dimensão da imagem (e o posto de T_3) é dois, porque a imagem é gerada por $\{\, (1, 2, 0, 0), (0, 0, 3, 1) \,\}$.
A nulidade de T_3 é zero (o kernel de T_3 é o espaço trivial).

Ex. 4 — Determine uma base para o espaço vetorial de matrizes 3×3 em que a primeira coluna é igual à primeira linha. Qual é a dimensão deste espaço?
Comentário: a dimensão é sete, porque a base (mostrada abaixo) tem sete elementos.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ex. 5 — Considere o conjunto $V = \{ (x, y) \mid \; x, y \in \mathbb{R} \}$. Ao invés de usar as operações usuais, definimos:

$$\begin{aligned}(a, b) + (r, s) &= (a + b, 0)\\ k(a, b) &= (a/k, kb)\end{aligned}$$

O conjunto V com estas operações é um espaço vetorial?
Comentário: Não. Basta um exemplo numérico mostrando que não vale a distributividade da multiplicação por escalar sobre a soma de escalares:

$$\begin{aligned}(2 + 3)(a, b) &= 6(a, b) = (a/6, b)\\ 2(a, b) + 3(a, b) &= (a/2, b) + a/3, b) = (5a/6, b).\end{aligned}$$

Ex. 6 — Considere a transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida da seguinte forma: $T \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ é igual a matriz abaixo multiplicada por $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$$

Determine a imagem, o kernel, o posto e a nulidade de T.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -8 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ -8x + 4y \end{pmatrix},$$

portanto a imagem é composta dos vetores da forma $(2x-y, -8x+y)$. No entanto, como a linha debaixo do vetor é multiplo da primeira ($\times -4$), podemos descrever a imagem como os vetores da forma

$$\begin{pmatrix} a \\ -4a \end{pmatrix}.$$

Uma base para a imagem é o vetor $(1, -4)^T$, portanto a dimensão da base é um.
Como a dimensão da base é um, temos

$$\begin{aligned}\dim \mathbb{R}^2 &= \dim \operatorname{Im} T + \dim \ker T\\ 2 &= 1 + \dim \ker T\end{aligned}$$

e a dimensão do kernel – nulidade de T – é 1.
E realmente, verificamos que T é zero quando:

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ -8x + 4y = 0 \end{cases}$$

Há uma linha redundante, e temos então que $T[(x, y)^T] = \mathbf{0}$ quando $2x = y$, ou ainda, para vetores da forma $(1k, 2k)$. Uma base para o kernel é $(1, 2)$.