Álgebra Linear – Prova II

Critérios para avaliação: Clareza, corretude, rigor, e concisão (i) A redação das respostas deve ser clara. (ii) Todo o raciocínio desenvolvido na resposta deve estar correto. (iii) O nível de rigor nas respostas deve ser próximo ao usado nas notas de aula e bibliografia básica. (iv) As respostas não devem ser mais longas que o necessário.

Ex. 1 — Encontre uma transformação $T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ que atenda simultaneamente aos requisitos a seguir:

- Quando aplicado em $x^3 + x + 1$, funciona como derivada;
- Quando aplicado em $x^2 + x$, funciona como identidade;
- Quando aplicado em $x + 1$, funciona como integral.

Comentário: A transformação deve obedecer:

$$\begin{aligned} T(x^3 + x + 1) &= 3x^2 + 1 \\ T(x^2 + x) &= x^2 + x \\ T(x + 1) &= \frac{x^2}{2} + x \end{aligned}$$

Ou seja, representando um polinômio $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ como (a_0, a_1, a_2, a_3), queremos

$$\begin{aligned} T(1, 1, 0, 1) &= (1, 0, 3) \\ T(0, 1, 1, 0) &= (0, 1, 1) \\ T(1, 1, 0, 0) &= (0, 1, 1/2) \end{aligned}$$

Como o espaço tem dimensão 4, incluímos mais um valor:

$$T(1, 0, 0, 0) = (0, 0, 0)$$

Agora determinamos a transformação.
Um vetor qualquer na base dada é

$$\begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Logo,

$$\begin{aligned} w &= a + c + d \\ x &= a + b + c \\ y &= b \\ z &= a \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
a &= z\\
b &= y\\
c &= x - y - z\\
d &= w - z - c = w - x + y
\end{aligned}$$

A transformação é

$$\begin{aligned}
T\begin{pmatrix} w\\ x\\ y\\ z\end{pmatrix} &= T\left[a\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right]\\
&= T\left[a\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right] + T\left[b\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right] + T\left[c\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right] + T\left[d\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right]\\
&= aT\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix} + bT\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} + cT\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + dT\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\\
&= a\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0\\1\\1/2\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}3a\\ b+c\\ a+b+c/2\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}3z\\ x-z\\ (x+y+z)/2\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

.

Ex. 2 — Considere as duas bases ordenadas a seguir para o espaço dos polinômios de grau um ou dois (mais o polinômio zero), $\mathbb{R}_{1..2}[x]$:

$$\begin{aligned}
B &= (-x, 2x^2)\\
C &= (2x^2 - x, -x^2)
\end{aligned}$$

Seja $(-2, 1)$ são as coordenadas de um polinômio $p(x)$ na base B. Responda:

i) Quem é o polinômio $p(x)$?

ii) Mostre a matriz de mudança de base de B para C, aplique a matriz e obtenha as coordenadas de $p(x)$ na base C. Verifique que as coordenadas obtidas são de fato do polinômio $p(x)$.

iii) Seja d/dx o operador derivada, definido no espaço de polinômios de que estamos tratando. Calcule $[d/dx]_{B\to C}$

Indique claramente em sua resposta os itens (i), (ii), e (iii).
Comentário:
(i) Usamos a base B para determinar p:

$$\begin{aligned}
p(x) &= -2(-x) + 1(2x^2)\\
&= 2x^2 + 2x
\end{aligned}$$

(ii)

$$[\mathrm{id}]_{B\to C} = \big([-x]_C \; [2x^2]_C\big)$$

Mas

$$\begin{aligned} -x &= 1(2x^2) + 2(-x^2) \\ 2x^2 &= 0(2x^2) - 2(-x^2) \end{aligned}$$

portanto

$$[\mathrm{id}]_{B\to C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Obtemos agora as coordenadas de p na base C:

$$\begin{aligned} [p(x)]_C &= [\mathrm{id}]_{B\to C} \; [p(x)]_B \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Confirmando que este é o mesmo vetor, mas escrito na base C:

$$-2(2x^2 - x) - 6(-x^2) = -4x^2 + 2x + 6x^2 = 2x^2 + 2x.$$

(iii) *Não podemos representar a derivada de um destes polinômios com as bases dadas, porque as derivadas teriam termos constantes*, portanto ignoraremos as constantes.
O operador d/dx ignorando termos constantes é

$$d/dx(a_1 x + a_2 x^2) = \cancel{a_1} + 2a_2 x = 2a_2 x$$

A matriz desta transformação é

$$d/dx = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

de forma que

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos agora

$$[\mathrm{id}]_{B\to E} = \big([-x]_E \; [2x^2]_E\big) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$[\mathrm{id}]_{E\to C} = \big([x]_C \; [x^2]_C\big) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

E finalmente,

$$\begin{aligned} [d/dx]_{B\to C} &= [\mathrm{id}]_{E\to C} \; [d/dx] \; [\mathrm{id}]_{B\to E} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Agora verificamos. Para o polinômio que havíamos usado de exemplo,

$$\begin{aligned} p(x) &= 2x + 2x^2 \\ [p(x)]_B &= (-2, 1)^T \end{aligned}$$

A derivada deste polinômio, ignorando o termo constante, é

$$\frac{d}{dx}2x + 2x^2 = \cancel{2} + 4x = 4x.$$

Na base C, o resultado é

$$[d/dx p(x)]_C = [id]_{E\to C}[d/dx][p(x)]_E = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \overbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}}^{[d/dx][p(x)]_E} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Agora calculamos

$$[d/dx p(x)]_C = [d/dx]_{B\to C}[p(x)]_B = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Ex. 3 — Se E é o produto de matrizes elementares (ou seja, $E = E_1 E_2 \cdots E_n$), pode-se concluir que E representa um isomorfismo de um espaço vetorial nele mesmo?

Comentário: Uma matriz elementar sempre tem inversa. A multiplicação de uma sequência de matrizes elementares representa uma sequência de operações elementares, e portanto também tem inversa (a operação inversa é reverter todas as operações realizadas). Como a matriz resultante é quadrada, então E representa um isomorfismo de **algum** espaço nele mesmo, porque ela é bijeção de um espaço de dimensão n para outro, de dimensão n.

Se tomarmos, no entanto, um subespaço de dimensão k, a afirmação já não vale, porque o contradomínio pode não estar contido no subespaço. Por exemplo, os vetores em $\mathbb{R}^3$ com a primeira coordenada zero são um subespaço U, mas

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \notin U$$