Álgebra Linear – Prova II

Critérios para avaliação: Clareza, corretude, rigor, e concisão (i) A redação das respostas deve ser clara. (ii) Todo o raciocínio desenvolvido na resposta deve estar correto. (iii) O nível de rigor nas respostas deve ser próximo ao usado nas notas de aula. (iv) As respostas não devem ser mais longas que onecessário.

Ex. 1 — Defina matrizes semelhantes.
Comentário: Uma matriz A é semelhante a B se e somente se existem P e Q tais que $A = PBQ$.

Ex. 2 — Seja

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & \pi \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Usando fatoração LU, resolva os sistemas

a) $A\mathbf{x} = (0, 2, 0)^T$

b) $A\mathbf{x} = (-1, 1, 1)^T$

Comentário: Antes de iniciar, faz sentido trocar a linha 1 com a linha 3, para isolar o π no canto inferior. Usamos para isso uma matriz P que permuta a primeira com a terceira linhas da matriz:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

E queremos resolver sistemas da forma $PA\mathbf{x} = P\mathbf{b}$. Fazemos a decomposição LU de PA (ou, de maneira semelhante, uma certa decomposição PLU de A):

$$PLU = A$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 3/2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & \pi - 5/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & \pi \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para resolver $PLU\mathbf{x} = P\mathbf{b}$ para $\mathbf{b} = (0, 2, 0)^T$, observamos:

- $P\mathbf{b} = (0, 2, 0)^T$
- Resolvemos primeiro $PL\mathbf{y} = P\mathbf{b}$, com $\mathbf{y} = U\mathbf{x}$.

Assim, o próximo passo é resolver o sistema triangular $PL\mathbf{y} = (0, 2, 0)^T$.

$$\begin{pmatrix} 3/2 & -2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Obtemos

$$\mathbf{y} = (0, 2, 4)^T$$

Resolvemos $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$, ou $U\mathbf{x} = (0, 2, 4)^T$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & \pi - 5/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

e finalmente obtemos

$$\mathbf{x} = \frac{1}{2\pi - 5}\big(-4,\ 6 - 4\pi,\ 8\big)^T.$$

Para $\mathbf{b} = (-1, 1, 1)^T$, o procedimento é similar:

•Resolvemos $PL\mathbf{y} = P\mathbf{b} = (1, 1, -1)^T$, obtendo $\mathbf{y} = (1, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2})^T$

•Resolvemos $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$, ou $U\mathbf{x} = (1, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2})^T$, e obtemos

$$\mathbf{x} = \frac{1}{2\pi - 5}\big(\pi - 1,\ 4 - \pi,\ -3\big)^T$$

Ex. 3 — Sejam

$$A = \left(\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

bases ordenadas para $M_{2\times 2}$.

a) Determine as matrizes $[id]_A^B$ e $[id]_B^A$.

b) Dada $[T]_B^B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, determine $[T]_A^A$

Comentário: Primeiro, levamos as matrizes para $\mathbb{R}^4$, e as bases são:

$$A = \left((4, 0, 0, 0)^T, (3, 0, 3, 0)^T, (2, 2, 0, 2)^T, (1, 1, 1, 0)^T \right)$$

$$B = \left((1, 0, 0, 0)^T, (0, 1, 0, 0)^T, (0, 0, 1, 0)^T, (0, 0, 0, 1)^T \right)$$

Agora, escrevemos a matriz que muda da base A para a base B:

$$[id]_A^B = \left((4, 0, 0, 0)^T, (3, 0, 3, 0)^T, (2, 2, 0, 2)^T, (1, 1, 1, 0)^T \right) = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

E sua inversa,

$$[id]_B^A = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & -1/4 & -1/4 \\ 0 & -1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Para obetr T na base A, basta calcular $[\mathrm{id}]_B^A [T]_B^B [\mathrm{id}]_A^B$, que é igual a

$$\begin{pmatrix} -1 & -3/4 & -3/2 & -1/2 \\ 0 & -1 & 4 & 4/3 \\ 0 & 3/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & -6 & -2 \end{pmatrix}$$

Ex. 4 — Seja $T : \mathbb{R}^3 \to M_{2\times 2}$ dada por

$$T\left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} z & x-y \\ z & 2x+y \end{pmatrix}$$

a) Determine uma base para $\ker T$ e determine a nulidade de T.

b) Determine uma base para $\operatorname{Im} T$ e determine o posto de T.

Comentário: $T[(x, y, z)] = \mathbf{0}$ quando:

- $z = 0$
- $x - y = 0$
- $2x + y = 0$

Ou seja, $x = y = 0$. Assim, $\ker T$ contém somente o vetor zero, e não tem base. A nulidade é zero. Como o domínio tem dimensão 3, e a nulidade é zero, então a imagem tem dimensão 3 também (o posto de T é 3). Os dois elementos na primeira coluna serão sempre iguais. Os dois na segunda coluna são a, b tais que $a = x-y$, $b = 2x+y$. Para quaisquer a e b há x e y que satisfazem estas equações, portanto podemos ter quaisquer dois números diferentes na segunda coluna. Uma base:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ex. 5 — Sejam V e W espaços vetoriais de dimensão finita em que $\dim V > \dim W$, e seja $T : V \to W$ uma transformação linear.

a) Mostre detalhadamente porque o posto de T não pode ser maior que $\dim W$.

b) Usando o fato acima (sobre o posto de T), mostre que existe algum vetor *diferente de zero* no kernel de T.

c) Usando apenas o fato acima (sobre o kernel de T), diga algo a respeito da possibilidade de T ser injetora, sobrejetora ou bijetora.

Comentário: (a) O posto de T é a dimensão da imagem, que é subespaço de W. Um subespaço de W não pode ter dimensão maior do que W.
(b) Pelo teorema do núcleo e da imagem, a dimensão do domínio (V) é igual à da imagem (*menor* que a de V) mais a nulidade. Assim, a nulidade é maior que zero – há necessariamente vetores diferentes de zero no kernel de T.
(c) Como o kernel é diferente de zero, T não pode ser injetora (Teorema visto em aula). Assim, também não é bijetora. Poderá ser sobrejetora, mas não há informação suficiente para dizer.