Álgebra Linear – Prova III

(i) **não** é permitido fazer consultas a material escrito ou pessoas; (ii) **não** é permitido usar calculadora, telefone, ou qualquer dispositivo tecnológico que auxilie a realizar contas.

Critérios para avaliação: Clareza, corretude, rigor, e concisão. (i) A redação das respostas deve ser clara. (ii) Todo o raciocínio desenvolvido na resposta deve estar correto. (iii) O nível de rigor nas respostas deve ser próximo ao usado nas notas de aula e bibliografia básica. (iv) As respostas não devem ser mais longas que o necessário.

Atenção: nos exercícios onde há subitens, faça apenas <u>um</u> deles, <u>indicando qual escolheu</u>.

Ex. 1 —

a) Resolva o sistema de equações diferenciais (descreva $y_1(t)$ em função de $y_1(0)$ e $y_2(t)$ em função de $y_2(0)$).

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 + y_2 \\ y_2' &= 35y_1 - y_2 \end{aligned}$$

Comentário: Temos $\mathbf{y} = A\mathbf{y}$, com

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 35 & -1 \end{pmatrix}$$

A matriz é diagonalizável:

$$A = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos e^{tA}:

$$\begin{aligned} e^{tA} = Pe^{D}P^{-1} &= P \begin{pmatrix} e^{-6t} & 0 \\ 0 & e^{6t} \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 7e^{6t} + 5e^{-6t} & e^{6t} - e^{-6t} \\ 35e^{6t} - 35e^{-6t} & 5e^{6t} - 7e^{-6t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

a solução do sistema é $y(t) = e^{tA}y(0)$, portanto

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} 7e^{6t} + 5e^{-6t} & e^{6t} - e^{-6t} \\ 35e^{6t} - 35e^{-6t} & 5e^{6t} - 7e^{-6t} \end{pmatrix} \mathbf{y}(0).$$

b) Encontre uma matriz com autovalores 2 e 10, sendo que o autovalor 2 deve ter autovetores da forma $(1,1)^T$, e o autovalor 10 deve ter autovetores da forma $(1,-1)^T$.

Comentário: A matriz de mudança de base P é composta pelos autovetores, e a diagonal D tem os autovalores:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Assim, como queremos $A = PDP^{-1}$, basta calcular a inversa de P e multiplicar PDP^{-1} para obter A:

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$$

c) Quando possível, calcule A^k. Pode deixar a resposta como produto de três matrizes. Se não conseguir, explique porque.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Comentário: A é diagonalizável:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$A^k = PD^kP^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^k + 1 & 3^k - 1 \\ 3^k - 1 & 3^k + 1 \end{pmatrix}$$

B só tem autovalores da forma $(x,x)^T$, portanto não conseguimos dois autovalores LI para diagonalizá-la. Teríamos que calcular B^k como $B \cdot B \cdot B \cdots B$.

Para C, temos

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

portanto

$$C^k = PD^kP^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (-1)^k 2^{k/2} + 2^{k/2} & (-1)^k 2^{k/2} - 2^{k/2} \\ (-1)^k 2^{k/2} - 2^{k/2} & (-1)^k 2^{k/2} + 2^{k/2} \end{pmatrix}$$

Ou ainda,

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} (-1)^k \sqrt{2}^k + \sqrt{2}^k & (-1)^k \sqrt{2}^k - \sqrt{2}^k \\ (-1)^k \sqrt{2}^k - \sqrt{2}^k & (-1)^k \sqrt{2}^k + \sqrt{2}^k \end{pmatrix}$$

Ex. 2 — Diga se são produtos internos:

a) No espaço de funções contínuas $C[0,1]$, $< f, g >= \int_0^1 [f(x) - g(x)]^2 dx$.

b) No espaço de matrizes $\mathcal{M}_{n \times n}$, $< A, B >= \prod_{i=1}^n (a_{ii})(b_{ii})$

Os dois são claramente comutativos e claramente positivos, mas não são bilinear. Logo, *não* são produtos internos.

Ex. 3 —

a) Considere o sistema de equações $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, com

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 5 \\ 1 & 3 & -3a \\ -1 & 0 & -a \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

determine todos os valores de a para os quais o sistema *não* tem solução.
Comentário: Para que o sistema não tenha solução, o determinante deve ser zero. Como

$$\det A = -3a^2 + 4a + 15,$$

basta obter as raízes deste polinômio:

$$a = \frac{-5}{3}, \quad a = 3$$

b) Se a variável x assumir somente valores no intervalo $[2, 3]$, qual será a mínima e a máxima área que pode ter o triângulo com vértices abaixo?

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix}$$

Comentário: área do triângulo é

$$\frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ x & -x & 1 \end{pmatrix}\right|$$

O determinante é $3x + 2$, logo a área ficará no intervalo

$$\frac{1}{2}\left[3(2) + 2, 3(3) + 2\right] = \left[4, \frac{11}{2}\right]$$