Álgebra Linear – Teste II

Critérios para avaliação: Clareza, corretude, rigor, e concisão (i) A redação das respostas deve ser clara. (ii) Todo o raciocínio desenvolvido na resposta deve estar correto. (iii) O nível de rigor nas respostas deve ser próximo ao usado nas notas de aula e bibliografia básica. (iv) As respostas não devem ser mais longas que o necessário.

Ex. 1 — Dê a transformação linear T de $\mathcal{M}_{2\times 2}$ em $\mathbb{R}_2[x]$ tal que

$$\begin{aligned} T\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} &= 1 - x^2, & T\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} &= x + 2x^2,\\ T\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} &= 3x, & T\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} &= 0. \end{aligned}$$

Comentário: Usamos os isomorfismos entre $\mathcal{M}_{n\times n}$ e $\mathbb{R}^4$ e entre $\mathbb{R}_2[x]$ e $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} &\leftrightarrow (a,b,c,d)^T\\ a_0 + a_1x + a_2x^2 &\leftrightarrow (a_0, a_1, a_2)^T \end{aligned}$$

Assim, precisamos encontrar $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, com

$$\begin{aligned} T(1,0,0,0)T &= (1,0,-1)^T\\ T(0,1,0,0)T &= (0,1,2)^T\\ T(0,0,1,0)T &= (0,3,0)^T\\ T(0,0,0,1)T &= (0,0,0)^T \end{aligned}$$

Temos portanto o efeito de T na base canônica. Fica assim fácil determinar T:

$$\begin{aligned} T(a,b,c,d)^T &= aT(1,0,0,0)^T + bT(0,1,0,0)^T + cT(0,0,1,0)^T + dT(0,0,0,1)^T\\ &= a(1,0,-1)^T + b(0,1,2) + c(0,3,0)^T + d\mathbf{0}\\ &= (a,0,-a)^T + (0,b,2b)^T + (0,3c,0)^T\\ &= (a, b+3c, 2b-a)^T \end{aligned}$$

Assim, de $\mathbb{R}^4$ em $\mathbb{R}^3$, já conhecemos T:

$$\boxed{T(a,b,c,d)^T = (a, b+3c, 2b-a)^T.}$$

Usando novamente os isomorfismos, temos

$$\boxed{T\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} = a + (b+3c)x + (2b-a)x^2.}$$

Ex. 2 — Seja W o espaço das matrizes $n \times n$ tais que a somatória da primeira linha é igual à somatória da última linha. Seja D o conjunto das matrizes diagonais de ordem n. Seja $f : W \to D$ tal que $f(A)$ produz uma matriz diagonal, e os elementos da diagonal de B são dados pelas somas da primeira com a última linha de A. Em outras palavras, $f(A) = B$ implica que:

- B é diagonal;
- $b_{ii} = a_{1i} + a_{ni}$.

Por exemplo,

$$f\begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 0 & 9 & 10 \\ 2 & 8 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

Calcule a dimensão de W, a nulidade e o posto de f.

Comentário:

Uma base para W terá $n^2 - 1$ elementos, porque um deles (algum dos elementos da 1^a ou última linha) será determinado por outros. Assim,

$$\boxed{\dim W = n^2 - 1}$$

Qualquer matriz diagonal pode ser criada por f. Para ilustrar, suponha que $n = 3$ e que queiramos a matriz diagonal

$$\begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Basta incluir a metade da diagonal em cada uma das duas linhas "especiais":

$$f\begin{pmatrix} -9/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -9/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Teremos desta forma a soma da primeira linha igual à da última coluna, e a diagonal é a que havíamos determinado. Assim, como a imagem de f tem *todas* as matrizes diagonais, e o posto de f é

$$\boxed{\dim \operatorname{Im} f = n}$$

Pelo Teorema do núcleo e da imagem,

$$\begin{aligned} \dim W &= \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f \\ n^2 - 1 &= \dim \ker f + n, \end{aligned}$$

e temos que a nulidade de f é

$$\boxed{\dim \ker f = n^2 - n - 1.}$$