Álgebra Linear – Teste III

> **Critérios para avaliação:** Clareza, corretude, rigor, e concisão (i) A redação das respostas deve ser clara. (ii) Todo o raciocínio desenvolvido na resposta deve estar correto. (iii) O nível de rigor nas respostas deve ser próximo ao usado nas notas de aula e bibliografia básica. (iv) As respostas não devem ser mais longas que o necessário.

Ex. 1 — Seja $T : \mathcal{M}_{2\times 2} \to \mathbb{R}_2[x]$, definida abaixo.

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ax^2 - (b+c)x$$

Mostre como esta transformação pode ser representada por uma matriz, e mostre como as linhas da matriz se relacionam com o posto da transformação.

Comentário: Usamos os seguintes isomorfismos, $r\mathcal{M}_{2\times 2} \to \mathbb{R}^4$ e $s : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^3$:

$$r\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

$$s(ax^2 + bx + c) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Assim, a transformação T pode ser vista como

$$T(a, b, c, d)^T = (a, -b-c, 0)^T,$$

que representamos como a matriz

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

já que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a, -b-c, 0 \end{pmatrix}.$$

A matriz tem *duas* linhas LI, porque a transformação tem posto dois: a imagem de T é gerada pelos *dois* vetores $(1, 0, 0)^T$ e $(0, 1, 0)^T$.

Ex. 2 — Considere as duas bases ordenadas a seguir para o espaço dos polinômios de grau no máximo um:

$$B = (-1, 4x)$$
$$C = (2x - 1, -3x)$$

Seja $(-2, 1)$ são as coordenadas de um polinômio $p(x)$ na base B. Responda:

i) Quem é o polinômio $p(x)$?

ii) Mostre a matriz de mudança de base de B para C.

iii) Aplique a matriz do item (ii) e obtenha as coordenadas de $p(x)$ na base C.

iv) Verifique que as coordenadas obtidas no item (iii) são de fato do polinômio $p(x)$.

Indique claramente em sua resposta os itens (i), (ii), (iii) e (iv).
Comentário:
(i)

$$p(x) = -2(-1) + 1(4x) = \mathbf{4x + 2}$$

(ii)

$$-1 = 1(2x - 1) + 2/3(-3x)$$
$$4x = 0(2x - 1) - 4/3(-3x).$$

portanto

$$[-1]_C = (1, 2/3)^T$$
$$[4x]_C = (0, -4/3)^T.$$

Finalmente,

$$[id]_{B \to C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2/3 & -4/3 \end{pmatrix}$$

(iii)

$$[p(x)]_C = [id]_{B \to C}[p(x)]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2/3 & -4/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -8/3 \end{pmatrix}$$

(iv) Usamos as coordenadas e os vetores de C:

$$-2(2x - 1) - 8/3(-3x) = (-4x + 2) + (8x) = \mathbf{4x + 2.}$$