Álgebra Linear – Prova IV resolvida

Critérios para avaliação: Clareza, corretude, rigor, e concisão (i) A redação das respostas deve ser clara. (ii) Todo o raciocínio desenvolvido na resposta deve estar correto. (iii) O nível de rigor nas respostas deve ser próximo ao usado nas notas de aula e bibliografia básica. (iv) As respostas não devem ser mais longas que o necessário.

Atenção: não há uma pontuação "por questão". A nota da prova pretende aferir a compreensão, de forma ampla, do conteúdo.

Ex. 1 — O polinômio característico de A é $x^2 - 2x + 1$, logo A tem um só autovalor, 1, com multiplicidade algébrica dois. Quando obtemos o autoespaço, vemos que é composto pelos vetores da forma

$$\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$$

e portanto tem dimensão um. Assim, A não é diagonalizável, portanto não sabemos, com o ferramental que temos, como calcular e^A. **IMPORTANTE:** *o motivo de A não ser diagonalizável é que não temos AUTOVETORES LI suficientes. O fato de uma matriz ter apenas um autovalor não significa que não seja diagonalizável – o autoespaço desse autovalor poderia ter dimensão maior que um!*
Agora, a matriz B tem polinômio característico $x^2 - e^{-2}$, com raízes $\pm e^{-1}$, e autovetores

$$\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix}$$

Construímos

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} e^{-1} & \\ & -e^{-1} \end{pmatrix}.$$

Sabemos que $B = PDP^{-1}$, logo

$$\begin{aligned}
B &= PDP^{-1} \\
e^B &= Pe^D P^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} e^{\begin{pmatrix} e^{-1} & \\ & -e^{-1} \end{pmatrix}} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{e^{-1}} & \\ & e^{-e^{-1}} \end{pmatrix} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ex. 2 — Não é bilinear:

$$< k(a_2x^2 + a_1x + a_0x),\ b_2x^2 + b_1x + b_0 >= \left|k(a_2 + a_1 + a_0) + b_2 + b_1 + b_0\right| \neq k\left|a_2 + a_1 + a_0 + b_2 + b_1 + b_0\right|$$

Ex. 3 — Escolhemos um intervalo fechado ($a \neq \infty, b \neq \infty$).

$$\begin{aligned}
\arccos \frac{\langle f, g\rangle}{||f||\;||g||} &= \arccos \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\sqrt{\int_a^b [f(x)]^2 dx \ \int_a^b [g(x)]^2 dx}} \\
&= \arccos \frac{\int_a^b e^x dx}{\sqrt{\int_a^b e^{2x} dx \ \int_a^b 1 dx}} \\
&= \arccos \frac{e^x|_a^b}{\sqrt{\left.\frac{(e^{2x})}{2}\right|_a^b (b-a)}} \\
&= \arccos \frac{e^b - e^a}{\sqrt{\frac{(e^{2b}-e^{2a})}{2}\ (b-a)}}
\end{aligned}$$

Se $b = 1, a = 0$, o ângulo é

$$\arccos \frac{e-1}{\sqrt{\frac{(e^2-1)}{2}}}.$$