Álgebra Linear
Exame
Avaliação para Equivalência

Critérios para avaliação: Clareza, corretude, rigor, e concisão (i) A redação das respostas deve ser clara. (ii) Todo o raciocínio desenvolvido na resposta deve estar correto. (iii) O nível de rigor nas respostas deve ser próximo ao usado nas notas de aula e bibliografia básica. (iv) As respostas não devem ser mais longas que o necessário. ⋆ **Mostre os passos intermediários! Não basta apenas apresentar o resultado!**

Atenção: não há uma pontuação "por questão". A nota da prova pretende aferir a compreensão, de forma ampla, do conteúdo.

Faça seis questões, à sua escolha!

Ex. 1 — Mostre[1] uma transformação linear injetora de $\mathbb{R}_4[x]$ em $\mathcal{M}_{2\times 2}$, ou prove que não existe.
Comentário: $\mathbb{R}_4[x]$ tem dimensão 5, e $\mathcal{M}_{2\times 2}$ tem dimensão 4. Não há como haver injeção de um espaço em outro de dimensão menor.

Ex. 2 — Encontre[2] a transformação $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_1[x]$ que atenda simultaneamente aos requisitos a seguir:

- Quando aplicado em $x^2 + x + 1$, resulta em $x + 1$;
- Quando aplicado em $x^2 + x$, resulta em 1;
- Quando aplicado em x^2, resulta em x.

Comentário Por isomorfismo, queremos $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, com

$$\begin{aligned} T(1,1,1)^T &= (1,1)^T \\ T(1,1,0)^T &= (0,1)^T \\ T(1,0,0)^T &= (1,0)^T \end{aligned}$$

A transformação é

$$T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b+c \\ c \end{pmatrix},$$

ou seja,

$$t(ax^2 + bx + c) = (a - b + c)x + c.$$

Ex. 3 — Seja $T(x,y,z)^T = (2x, 3y, 5z)$. Prove que a matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

não pode representar T, *em nenhuma base de* $\mathbb{R}^3$.
Comentário: o posto da transformação é 3, e a matriz tem determinante zero (logo tem posto menor que 3). Tendo posto diferente da transformação, a matriz não pode representá-la.

[1] Denotamos por $\mathcal{M}_{a\times b}$ o espaço das matrizes com a linhas e b colunas.
[2] Denotamos por $\mathbb{R}_n[x]$ o espaço dos polinômios de grau menor ou igual a x.

Ex. 4 — Calcule o determinante da matriz.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & -6 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Comentário: Aplicamos algumas operações elementares,

$$\xrightarrow{L_5+L_4} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & -6 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_4-L_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & -6 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_4+\frac{1}{4}L_3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & -6 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1/2 & 2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3+2L_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & -1/2 & 2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3\leftrightarrow L_4} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1/2 & 2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

O produtório da diagonal é $(2)(1)(-1/2)(6)(2) = -12$. Como trocamos linhas uma vez, trocamos o sinal, e o determinante é $+12$.

Ex. 5 — Tente calcular e^A, e^B. Pode deixar a resposta como produto de três matrizes. Se não conseguir calcular, explique o motivo.

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Comentário: A tem somente o autovalor $1/2$, *e seu autoespaço é gerado por* $(1,0)^T$, logo tem dimensão um. Como não podemos obter dois autovetores LI, a matriz não é diagonalizável. *A exponencial da matriz existe, mas não vimos neste curso como calculá-la.*
Já B tem autovalores $1/2$ e $3/2$. Obtemos portanto dois autovetores LI:

$$\lambda_1 = 1/2 \quad \to \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 3/2 \quad \to \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Assim, temos

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1/2 & \\ & 3/2 \end{pmatrix}$$

e $B = PDP^{-1}$. Logo,

$$\begin{aligned} e^B &= e^{PDP^{-1}} \\ &= Pe^D P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & \\ & 3/2 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & \\ & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ex. 6 — No espaço $\mathbb{R}_1[x]$ de polinômios com grau máximo 1, verifique se

$$\langle a_1 x + a_0, b_1 x + b_0 \rangle = a_1 b_1 - a_0 b_0$$

é produto interno. Explique porque sim ou porque não.
Comentário: Não é, porque não é comudativo: $a_1 b_1 - a_0 b_0$ e $a_0 b_0 - a_1 b_1$ nem sempre são iguais.

Ex. 7 — Usando o produto interno usual entre funções no intervalo $[0, b]$, com $b > 0$, qual é o ângulo entre as funções $f(x) = x$ e $g(x) = 1$?
Comentário: acos $\sqrt{3}/2 = \pi/6$, não depende de b!