Álgebra Linear – Lista I

Ex. 1 — A seguir há uma lista de conjuntos. Determine se estes conjuntos são espaços vetoriais, se usarmos a soma e a multiplicação usuais.

1. $\{\,(a,b)\in\mathbb{R}^2:\ a<b\,\}$.
2. O conjunto dos números complexos com coeficientes racionais ($a+bi,\ a,b\in\mathbb{Q}$).
3. O conjunto de pontos com coordenadas pares em $\mathbb{R}^2$.
4. O conjunto dos pontos com pelo menos uma coordenada prima em $\mathbb{R}^2$.
5. O conjunto dos vetores $(x,y,z)^T$ em $\mathbb{R}^3$ tais que $x=0$ *ou* $y=0$.
6. O conjunto dos vetores $(x,y,z)^T$ em $\mathbb{R}^3$ que são múltiplos de $(3,2,1)^T$.
7. Os vetores em $\mathbb{R}^n$ que, quando lidos, são palíndromos (ou seja, todos os vetores da forma[1] $(x_1,x_2,x_3,\dots,x_{\lceil n/2\rceil},\dots,x_3,x_2,x_1)$ – ou seja, $x_1=x_n$, $x_2=x_{n-1}$, etc). Por exemplo, os vetores $(3,5,5,3)^T$, $(0,1,3,1,1,3,1,0)^T$ e $(9,8,-1,8,9)^T$ são palíndromos.
8. O conjunto das funções reais crescentes.
9. O conjunto das funções reais pares.
10. O conjunto das funções reais ímpares.
11. O conjunto das funções reais tais que $f(0)=f(1)$.
12. O conjunto das funções reais tais que $f(0)=f(1)+1$.
13. O conjunto das funções reais contínuas $f(x)$ definidas no intervalo $[0,1]$, tais que $\int_0^1 f(x)dx\geq 0$.
14. O conjunto de todas as funções reais com período π.

Ex. 2 — Verifique se as operações de soma a seguir podem ser usadas para tornar $\mathbb{R}^2$ um espaço vetorial:

1. $\mathbf{v}+\mathbf{w}=(v_1+w_2,w_1+v_2)^T$
2. $\mathbf{v}+\mathbf{w}=(v_1+v_2,w_1+w_2)^T$
3. $\mathbf{v}+\mathbf{w}=(v_1w_1,v_2w_2)^T$
4. $\mathbf{v}+\mathbf{w}=(2v_1+2v_2,3w_1+3w_2)^T$
5. $\mathbf{v}+\mathbf{w}=(v_1,v_1)^T$
6. $\mathbf{v}+\mathbf{w}=(v_1,0)^T$
7. $\mathbf{v}+\mathbf{w}=(v_1,1)^T$

[1] Na fórmula descrevendo o vetor, $\lceil n/2\rceil$ é o menor inteiro maior ou igual a $n/2$. Por exemplo, $\lceil 3\rceil=3$ e $\lceil 4.2\rceil=5$.

Ex. 3 — Sejam dois espaços vetoriais, V e W, ambos sobre o mesmo corpo. As operações de soma de vetores nestes espaços são $+_V$ e $+_W$. O conjunto $V \times W$ é o produto cartesiano de V com W, ou seja, os elementos de $V \times W$ são os pares $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$, onde $\mathbf{v} \in V$ e $\mathbf{w} \in W$. Que operações podemos usar em $V \times W$ para torná-lo um espaço vetorial? Verifique que $V \times W$ com suas operações tem cada uma das propriedades descritas na definição de espaço vetorial.

Ex. 4 — A união do subespaço de funções pares com o subespaço de funções ímpares é subespaço?