Álgebra Linear – Lista V

Ex. 1 — Mostre uma matriz de ordem 3, que não seja triangular, cujo polinômio característico tenha uma das raízes na posição $a_{1,1}$.

Ex. 2 — Calcule os autovalores e autovetores das matrizes. Quando forem diagonalizáveis, mostre a forma diagonal, como produto de tres matrizes. Quando não forem, explique o motivo.

$$\begin{pmatrix} 0 & -k \\ -k & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -k \\ k & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & a \\ a & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ex. 3 — Sejam

$$A = \begin{pmatrix} 5/2 & 1/2 & 0 \\ -6 & -1 & 0 \\ -17/2 & -5/2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 9 & -9 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{pmatrix}$$

Calcule e^A, e^B, A^{100}, B^{100}, e^C, C^{10} e C^{11}.

Ex. 4 — Resolva o sistema de equações diferenciais:

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= -11y_1(x) + 3y_2(x) \\ y_2'(x) &= -36y_1(x) + 10y_2(x) \end{aligned}$$

Ex. 5 — Determine $T(x, y, z)$ sabendo que $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é um operador linear com autovalores $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, com respectivos autoespaços

$$\begin{aligned} &\{(x, x+y, y)^T \ : \ x, y \in \mathbb{R}\}, \\ &\{(0, x, 2x)^T \ : \ x \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Ex. 6 — Se um operador linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tem tres autovalores com autoespaços

$$\begin{aligned} &\{(x, x+y, y, 0)^T \ : \ x, y \in \mathbb{R}\}, \\ &\{(0, x, 2x, 3x)^T \ : \ x \in \mathbb{R}\}, \\ &\{(x, x, x, x)^T \ : \ x \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

pode-se dizer que T é diagonalizável, ou que não é?

Ex. 7 — Seja A uma matriz $n \times n$ que só tem o autovalor zero, com multiplicidade algébrica n. A tem inversa? Em que base A é diagonal, e em que base A não é diagonal? Qual a multiplicidade geométrica do autovalor 0? Quais são o posto e a nulidade de A?