Lista 8 - Álgebra Linear

Autovalores e Autovetores

1 — Sendo $T : V \to V$ um operador linear, mostre que o conjunto $V_\lambda = \{\mathbf{v} \in V | T\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}\}$, formado pelos autovetores associados a um autovalor λ, inclusive $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, é um subespaço vetorial de V.

2 — Encontre os autovalores e autovetores associados dos operadores lineares $T : V \to V$ e matrizes $A \sim n \times n$ seguintes:

a) $V = \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x + y, 2x + y)$

b) $V = \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x + y + z, x - y + 2z, 2x + y - z)$

c) $V = P_2$, $T(ax^2 + bx + c) = ax^2 + cx + b$

d) $V = P_2$, $T(ax^2 + bx + c) = 2ax + b$, (derivada)

e) $V = M(2, 2)$, $T(A) = A^T$, $A \in M(2, 2)$

f) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

g) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

h) $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$

i) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

j) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 4 & 0 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

k) $A = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 14 \\ 2 & -7 & 14 \\ 2 & -4 & 11 \end{bmatrix}$

3 — Calcule os autovalores reais e seus autovetores dos operadores lineares em $\mathbb{R}^3$

a) rotação de θ em torno de z: $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) rotação de $\pi/2$ em torno de (1,1,1):

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 - \sqrt{3} & 1 + \sqrt{3} \\ 1 + \sqrt{3} & 1 & 1 - \sqrt{3} \\ 1 - \sqrt{3} & 1 + \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$$

[**Dica:** qual é o autovetor (direção invariante) óbvio?]

4 — Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. (a) Encontre os autovalores de A e A^{-1}. (b) Encontre os autovetores.

5 — Dado um operador linear $T : V \to V$, mostre que ker(T)=V_λ, com $\lambda = 0$, desde que ker(T)$\neq \{\vec{0}\}$. Mostre que quando $\lambda = 0$ é autovalor, T não é injetora. Mostre a recíproca: quando T não é injetora, $\lambda = 0$ não pode ser autovalor de T.

6 — Verifique quais dos operadores e matrizes da questão 2 são diagonalizáveis. (Um operador é diagonalizável quando sua matriz de transformação em alguma base é diagonalizável. Uma matriz é diagonalizável quando é possível encontrar uma base de autovetores para V.)

7 — m Diagonalize a matriz $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$, i.e., encontre uma matriz M tal que $M^{-1}AM$ é uma matriz diagonal. Verifique que $M^{-1}AM = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$, onde λ_1, λ_2 são os autovalores de A.

8 — Diagonalize a matriz A em (2.j).

9 — Resolva o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias para as variáveis $x(t), y(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 5x + 3y\,, \\ \dot{y} &= 3x - 3y\,. \end{aligned}$$

(utilize o exercício anterior.)

10 — Sendo A a matriz do exercício 7, calcule A^2, A^4 e A^{10}. Utilize $A^2 = (M^{-1}DM)(M^{-1}DM) = M^{-1}D^2M$, onde D é a matriz diagonal após diagonalização. Calcule A^2 explicitamente e compare.

11 — Diz-se que um operador linear $T : V \to V$ é nilpotente se existir um número inteiro positivo n, tal que $T^n = 0$ (i.e., $T \circ T \circ \cdots \circ T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\ \forall\ \mathbf{v} \in V$). Sendo T nilpotente,

a) Encontre seus autovalores;
b) Mostre que um operador linear nilpotente, não nulo, não é diagonalizável;
c) Mostre que T dado em (2.d) é nilpotente.

12 — Diz-se que um operador linear $T : V \to V$ é idempotente se $T^2 = T$ (i.e., $T \circ T(\mathbf{v}) = T(\mathbf{v})\ \forall\ \mathbf{v} \in V$). Sendo T idempotente,

a) Encontre seus autovalores;
b) Dê um exemplo de matriz idempotente para $V = \mathbb{R}^2$;
c) Mostre que um operador linear idempotente é diagonalizável.