Álgebra Linear – Prova II

Critérios para avaliação: Clareza, corretude, rigor, e concisão (i) A redação das respostas deve ser clara. (ii) Todo o raciocínio desenvolvido na resposta deve estar correto. (iii) O nível de rigor nas respostas deve ser próximo ao usado nas notas de aula e bibliografia básica. (iv) As respostas não devem ser mais longas que o necessário.

Atenção: não há uma pontuação "por questão". A nota da prova pretende aferir a compreensão, de forma ampla, do conteúdo.

Ex. 1 — Escreva as matrizes das transformações. Depois determine núcleo, imagem, nulidade e posto de cada uma.

a) $T(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T = (x_1 - x_2, x_3, 5x_4 + x_5)^T$

b) $T(x) = (-x, 0, 2x)^T$

c) $T(x, y, z)^T = (x - y)$

Comentário:
Matrizes:

$$(\mathbf{a}) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad (\mathbf{b}) \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (\mathbf{c}) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Imagens:
(a)

$$\left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^3$$

(b)

$$\left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -2a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$$

(c)

$$\{(a) : a \in \mathbb{R}\}$$

Os postos (dimensões das imagens) são 3, 1 e 1, respectivamente.
Núcleos:

Núcleos: (a)

$$\left\{ \begin{pmatrix} a\\ b\\ c\\ d\\ e \end{pmatrix} : a,b,c,d,e \in \mathbb{R},\ \ a=b, c=0, 5d+e=0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a\\ a\\ 0\\ d\\ -5d \end{pmatrix} : a,b,c,d,e \in \mathbb{R},\ \ a=b, c=0, 5d+e=0 \right\}$$

(b)

$$\{(0)\}$$

(c)

$$\left\{ \begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix} : x=y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x\\ x\\ z \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

As nulidades são 2, 0 e 2.

Ex. 2 — Calcule $[T]_{A\to B}$, usando as bases A e B a seguir, e $T(x,y)^T = (2y-x, 0, 2x+y)^T$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4\\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1\\ 4 & -1 & 1\\ 8 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comentário:

$$[T]_{A\to B} = [id]_{C\to B}(T)[id]_{A\to C}$$

Temos

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 2\\ 0 & 0\\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(na base canônica)}$$

$$[id]_{C\to B} = \begin{pmatrix} -1/6 & 0 & 1/6\\ 2/3 & -1 & 1/3\\ 4/3 & 0 & -1/3 \end{pmatrix} \qquad \text{(colunas da canônica na base } B\text{)}$$

$$[id]_{A\to C} = \begin{pmatrix} 0 & 4\\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{(colunas de } A \text{ na base canônica)}$$

$$[T]_{A\to B} = [id]_{C\to B}(T)[id]_{A\to C} = \begin{pmatrix} -1/6 & 0 & 1/6\\ 2/3 & -1 & 1/3\\ 4/3 & 0 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2\\ 0 & 0\\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 4\\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Ex. 3 — Inverta a matriz:

$$\begin{pmatrix} 2 & 10 & 0\\ -1 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Comentário

Primeiro, $L2 + \frac{1}{2}L1$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 10 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Agora, $L1 - L2$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & -1 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalmente, $1/2 \times L1$ e $1/10 \times L2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1/4 & -1/2 & 0 \\ 1/20 & 1/10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\textbf{INVERSA}}$$

Ex. 4 — Calcule os determinantes das matrizes a seguir.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & x^3 \\ x & 1 & x^2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & -4 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & -2 & 11 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

Comentário:
Na primeira matriz, some a linha 1 à linha 3:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & x^3 \\ x & 1 & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & x^3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Agora faça por blocos:

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & x^3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = (-1)(8) = \mathbf{-8}$$

Para a segunda, troque as linhas 2 e 4:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & -4 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 0 & 11 \\ 4 & 2 & 3 & -2 & 11 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

Agora faça por blocos. Como trocamos linhas, multiplicamos por (-1):

$$(-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix} = (-1)(-24)(66) = (-1)(-1584) = \mathbf{1584.}$$