Álgebra Linear – Lista de Exercícios

Ex. 1 — Para que valores de K a matriz a seguir tem inversa?

$$\begin{pmatrix} 2 & K & 1 & 2 \\ 0 & 1 & K & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -K & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Comentário: $K \neq \pm 2$.

Ex. 2 — Calcule a inversa da matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Comentário: a inversa é

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Ex. 3 — Diagonalize a matriz

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Comentário: o polinômio característico é $x^2 + 4x$. os autovalores são -4, 0. autovetores $(a, -a)^T$ para -4 e $(a, a)^T$ para 0.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Ex. 4 — Determine o valor de K para que todos os autovalores tenham multiplicidade algébrica igual a um em cada martiz.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & K \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & K \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Comentário: Os polinômios caracteriticos de A e B são $x^2 - K$ e $x^2 - x - K$. Para que os autovalores tenham multiplicidade algébrica igual a um, os polinômios precisam de *duas raízes diferentes*. As raízes para A são

$$\lambda_A = \pm\sqrt{K}$$

portanto $K \neq 0$ resolve o problema. Para B,

$$\lambda_B = \frac{1 \pm \sqrt{4K+1}}{2},$$

que queremos que sejam diferentes. Assim, precisamos de $\Delta = 4K + 1 \neq 0$, e obtemos

$$K \neq -\frac{1}{4}.$$

Ex. 5 — Diga se é produto interno:

a) Em $\mathbb{R}_4[x]$, $< p, q >= (p(0)q(0))^2$.

b) Em $M_{n\times n}$, $< A, B >= |a|\,|b|$, onde a é o posto de A e b é o posto de B.

c) No espaço das funções reais deriváveis uma vez, $< f, g >= f'(0)g'(0)$.

d) Em $\mathbb{R}^2$, $< x, y >= x_1x_2 + x_2x_1$.

e) No espaço das funções integráveis em $[0, 1]$, $< f, g >= \int_0^1 1/(f(x)g(x))dx$.

Comentário: (a) não é bilinear! (b) não é bilinear! (c) SIM, é produto interno! (d) da maneira como está escrito, o produto ignora o vetor **y**; não é comutativo! (e) primeiro, não funciona em todo o espaço vetorial, porque a função zero não pode ser usada no rpoduto; além disso, não é bilinear (multiplicação por constante falha)

Ex. 6 — Em $\mathbb{R}^2$, usaremos a função

$$< (a, b)^T,\ (\alpha, \beta)^T >= \int_0^\pi (a\alpha)\cos(x) + (b\beta)\,\mathrm{sen}(x)dx.$$

Note que não é um espaço de funções, mas nosso produto interno pode ser uma integral assim mesmo!

- calcule a norma de $(\pi/2, 1)^T$.
- determine uma função que seja ortogonal a $(0, 1)^T$.

Comentário: no primeiro item, basta fazer a conta: a norma é 2.
o segundo item foi **cancelado**: pedia-se uma *função* ortogonal a um *vetor*.