Álgebra Linear – Prova III

Critérios para avaliação: Clareza, corretude, rigor, e concisão (i) A redação das respostas deve ser clara. (ii) Todo o raciocínio desenvolvido na resposta deve estar correto. (iii) O nível de rigor nas respostas deve ser próximo ao usado nas notas de aula e bibliografia básica. (iv) As respostas não devem ser mais longas que o necessário.

Atenção: não há uma pontuação "por questão". A nota da prova pretende aferir a compreensão, de forma ampla, do conteúdo.

Faça quatro das questões a seguir.

Ex. 1 — Para que valores de K a matriz a seguir tem inversa?

$$\begin{pmatrix} 2 & K & 1 & 2 \\ 0 & 1 & K & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -K & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Comentário: ± 2, idêntica à da lista.

Ex. 2 — Calcule a inversa da matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Comentário: A inversa é

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Ex. 3 — Diagonalize a matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$$

Comentário: O polinômio característico é $x^2 - 2x - 80$, e os autovalores são 10 e -8, com autovetores $(a, a)^T$ e $b, -b)^T$. A matriz dada é igual a

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ex. 4 — Diga se é produto interno:

a) Em $\mathbb{R}_2[x]$, $< p, q >= |p(0)q(0)|$.

b) Em $M_{n\times n}$, $< A, B >= \sum_i \sum_j (a_{ij} + b_{ij})$;

c) No espaço das funções reais deriváveis uma vez, $< f, g >= (fg)'(0)$.

Comentário: Nenhum deles é produto interno. (a) SIM; (b) não vale positividade! (c) não vale positividade!

Ex. 5 — Seja

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Determine quais são as matrizes quadradas *diagonais* mais próximas de A, onde por “próxima” entendemos aquela com a menor distância (use o produto interno usual para matrizes). Mostre tanto a descrição geral delas (descreva o conjunto) como um exemplo concreto (mostre uma dessas matrizes).
Comentário: Queremos a menor distância possível. A distância entre A e uma matriz diagonal

$$D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

será

$$\begin{aligned} d(A, D) &= ||A - D|| \\ &= \left|\left| \begin{pmatrix} 1-a & 2 \\ -1 & 4-b \end{pmatrix} \right|\right| \\ &= \sqrt{\left\langle \begin{pmatrix} 1-a & 2 \\ -1 & 4-b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1-a & 2 \\ -1 & 4-b \end{pmatrix} \right\rangle} \\ &= \sqrt{(1-a)^2 + 2^2 + (-1)^2 + (4-b)^2} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2 - 2a - 8b + 22} \end{aligned}$$

e a matriz diagonal que mais se aproxima de A é aquela onde as duas entradas a e b minimizam a expressão acima. **NÃO era necessário dizer mais que isso**. Mas, já que chegamos até aqui, para quem fez FVV: como minimizamos a expressão? Como a função é quadrática em a e em b, (i) vemos que os coeficientes de a e b são positivos, então sabemos a forma da função; podemos jogar fora a raiz quadrada; e (ii) há um único ponto onde as derivadas parciais são zero. Assim, calcule o gradiente e iguale a zero. Se

$$f(a, b) = a^2 + b^2 - 2a - 8b + 22$$

então

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial a}, \frac{\partial f}{\partial b} \right) &= (0, 0) \\ (2a - 2, 2b - 8) &= (0, 0) \end{aligned}$$

e portanto

$$a = 1, \quad b = 4$$

E a matriz diagonal com a menor distância até A é

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

A propósito, a distância é $\sqrt{5}$.

Ex. 6 — (Bônus) Em $\mathbb{R}_4[x]$, seja T o operador

$$T(p) = \frac{1}{x}\int_0^x p(t)dt.$$

Como T é espaço de dimensão finita, então é isomorfo a $\mathbb{R}^n$, para algum n. Isso significa que podemos montar uma matriz que representa T. Mostre essa matriz. Depois, identifique os autovalores e autovetores de T.

Comentário: Calculamos $T(p(x))$,

$$\begin{aligned}
T(p) &= \frac{1}{x}\int_0^x p(t)dt \\
&= \frac{1}{x}\int_0^x a_4t^4 + a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0 dt \\
&= \frac{1}{x}\left(\frac{a_4}{5}t^5 + \frac{a_3}{4}t^4 + \frac{a_2}{3}t^3 + \frac{a_1}{2}t^2 + a_0t\right)\Big|_0^x \\
&= \frac{1}{x}\left(\frac{a_4}{5}x^5 + \frac{a_3}{4}x^4 + \frac{a_2}{3}x^3 + \frac{a_1}{2}x^2 + a_0x\right) \\
&= \frac{a_4}{5}x^4 + \frac{a_3}{4}x^3 + \frac{a_2}{3}x^2 + \frac{a_1}{2}x^1 + a_0
\end{aligned}$$

então, os coeficientes foram transformados da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
a_4 &\to a_4/5 \\
a_3 &\to a_3/4 \\
a_2 &\to a_2/3 \\
a_1 &\to a_1/2 \\
a_0 &\to a_0
\end{aligned}$$

e a matriz de T é

$$T = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

NÃO precisamos calcular o polinômio característico! Como a matriz é diagonal, os autovalores já estão ali: $1/5, 1/4, 1/3, 1/2, 1$. Os autovetores são

$$\begin{aligned}
1/5 &\to (1,0,0,0,0)^T \\
1/4 &\to (0,1,0,0,0)^T \\
1/3 &\to (0,0,1,0,0)^T \\
1/2 &\to (0,0,0,1,0)^T \\
1 &\to (0,0,0,0,1)^T
\end{aligned}$$

Ex. 7 — (Bônus) Em $\mathbb{R}^2$, considere a função

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_2 - x_2y_1.$$

Dê uma interpretação geométrica para esta função, e diga porque sua interpretação é válida.

Comentário: a função $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ é o determinante de

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix},$$

e portanto é a área do paralelogramo gerado pelos vetores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.