Lista 3 - Bases Matemáticas

Indução

1 — Calcule :

a) a soma dos n primeiros números pares.

b) a soma dos n primeiros números ímpares.

2 — Prove que para todo inteiro positivo n vale:

$$= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}.$$

3 — Demonstre que para todo inteiro positivo n vale:

a) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{1}{2}n(n+1)\right)^2$.

b) $1 + 2(\frac{1}{2}) + 3(\frac{1}{2})^2 + \cdots + n(\frac{1}{2})^{n-1} = 4 - \frac{n+2}{2^{n-1}}$.

c) $(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3}) \cdots (1 - \frac{1}{n+1}) = \frac{1}{n+1}$.

d) $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$.

e) $n < 2^n$.

f) $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^{n+1}n^2 = (-1)^{n+1}\frac{n(n+1)}{2}$.

4 — Dados a e r dois números inteiros, $r \neq 1$. A sequência $a_1 = a, a_2 = ra, a_3 = r^2a, \cdots, a_n = r^{n-1}a, \cdots$ é denominada **progressão geométrica de razão r**. Prove que a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica é:

$$S_n = \frac{r^n a - a}{r - 1}.$$

5 — Prove que $2n + 1 < 2^n$ para todo $n > 3$.

6 — Seja x um inteiro positivo. Demonstre que:

$$(1 + x)^n > 1 + nx, \text{para todo } n \geq 2.$$

7 — Prove que

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

8 — Prove que para qualquer inteiro positivo n o número $2^{2n} - 1$ é divisível por 3.

9 — Prove que um caixa eletrônico pode entregar ao usuário qualquer valor maior ou igual a R$4 usando apenas notas de dois e de cinco reais.

* **10** — Mostre que a soma dos ângulos internos de um polígono convexo com n lados ($n \geq 3$) é $(n - 2)\pi$.

Exercícios Extras:

11 — Prove que

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 2$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n}{2n+1}$

d) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} j(j+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

e) $\sum_{j=1}^{n}(2j-1)=n^2$

f) $\sum_{i=1}^{n} i(i!)=(n+1)!-1$

12 — Use indução para mostrar que um conjunto finito com n elementos possui 2^n subconjuntos.

* **13 —** Sejam $X, X_1, X_2, \cdots, X_n$ conjuntos com relação a um conjunto universo $\mathbb{U}$ fixado.

a) Prove por indução que

$$X \cap (X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n) =$$
$$= (X \cap X_1) \cup (X \cap X_2) \cup \cdots \cup (X \cap X_n).$$

b) Prove por indução que

$$(X_1 \cup X_2 \cup \cdots X_n)^C = (X_1^C) \cap (X_2^C) \cap \cdots \cap (X_n)^C.$$

* **14 —** Prove que para todo $n \geq 9$,

$$n! \geq (2n)^2$$

.

* **15 —** Prove para todo $n \geq 1$,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} < 2 - \frac{1}{n}$$

Respostas dos Exercícios

1 b.) Comecemos com verificar a condição PIF 1.

$$P(1) = \text{"}1 = 1^2\text{"}$$

Logo, $P(1)$ é verdadeira. Para verificar a condição PIF 2, devemos tomar um número natural positivo qualquer $k \in \mathbb{N}$ e mostrar que vale a implicação $P(k) \Rightarrow P(k+1)$. Em outras palavras, devemos supor que $P(k)$ é verdadeira (hipótese indutiva) e mostrar que $P(k+1)$ é verdadeira. Logo, a nossa hipótese indutiva é

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2$$

Reescrevendo $P(k+1)$ e usando a hipótese indutiva temos :

$$\begin{aligned} &1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + (2(k + 1) - 1) \\ &= k^2 + 2k + 1 \\ &= (k + 1)^2 \end{aligned}$$

Assim, verificamos que, se $P(k)$ é verdadeira, também o é $P(k+1)$. Donde, pelo PIF, concluímos que $P(n)$ é verdadeira para todo natural $n \geq 1$, i.e. para todo natural positivo.

2 Comecemos com verificar a condição PIF 1.

$$\begin{aligned} P(1) &= \text{"}1 + 2 = 2^{1+1} - 1\text{"} && (1) \\ P(1) &= \text{"}3 = 3\text{"} \qquad \text{verdadeira} && (2) \end{aligned}$$

Logo, $P(1)$ é verdadeira. Para verificar a condição PIF 2, devemos tomar um número natural positivo qualquer $k \in \mathbb{N}$ e mostrar que vale a implicação $P(k) \Rightarrow P(k+1)$. Em outras palavras, devemos supor que $P(k)$ é verdadeira (hipótese indutiva) e mostrar que $P(k+1)$ é verdadeira. Logo, a nossa hipótese indutiva é

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$$

Reescrevendo $P(k+1)$ e usando a hipótese indutiva:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} &= 2^{k+1} - 1 + 2^{k+1} \\ &= 2(2^{k+1}) - 1 \\ &= (2^{k+2}) - 1 \end{aligned}$$

Assim, verificamos que, se $P(k)$ é verdadeira, também o é $P(k+1)$. Donde, pelo PIF, concluímos que $P(n)$ é verdadeira para todo natural $n \geq 1$, i.e. para todo natural positivo.

3 d.) Comecemos com verificar a condição PIF 1.

$$\begin{aligned} P(1) &= \text{"}1 + 2 = 2^{1+1} - 1\text{"} \\ P(1) &= \text{"}3 = 3\text{"} \qquad \text{verdadeira} \end{aligned}$$

Logo, $P(1)$ é verdadeira. Para verificar a condição PIF 2, devemos tomar um número natural positivo qualquer $k \in \mathbb{N}$ e mostrar que vale a implicação $P(k) \Rightarrow P(k+1)$. Em outras palavras, devemos supor que $P(k)$ é verdadeira (hipótese indutiva) e mostrar que $P(k+1)$ é verdadeira. Logo, a nossa hipótese indutiva é

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$$

Usando a hipótese de indução, queremos demonstrar $P(k+1)$, reescrevendo $P(k+1)$ e usando a hipótese indutiva temos:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^k + 2^k + 1 &= 2^{k+1} - 1 + 2^{k+1} \\ &= 2(2^{k+1}) - 1 \\ &= (2^{k+2}) - 1 \end{aligned}$$

6 Comecemos com verificar a condição PIF 1.

$$\begin{aligned} &P(2) = \text{"}(1 + x)^2 > 1 + 2x\text{"} \\ &P(2) = \text{"}1 + 2x + x^2 > 1 + 2x\text{"} \\ &\text{como } x > 0,\ P(2) \text{ é verdadeira} \end{aligned}$$

Logo, $P(2)$ é verdadeira. Para verificar a condição PIF 2, devemos tomar um número natural positivo qualquer $k \in \mathbb{N}$ e mostrar que vale a implicação $P(k) \Rightarrow P(k+1)$. Em outras palavras, devemos supor que $P(k)$ é verdadeira (hipótese indutiva) e mostrar que $P(k+1)$ é verdadeira. Logo, a nossa hipótese indutiva é

$$(1 + x)^k > 1 + kx$$

Usando a hipótese de indução, queremos demonstrar $P(k+1)$, reescrevendo $P(k+1)$ e usando a hipótese indutiva temos:

$$\begin{aligned}(1+x)^{k+1} &= (1+x)((1+x)^k) \\ &\geq (1+x)(1+kx) \\ &\geq 1+kx+x+kx^2 \\ &\geq 1+(k+1)x\end{aligned}$$

7 Comecemos com verificar a condição PIF 1.

$$P(1) \quad = \quad \text{“}\frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{1\cdot 2}\text{'} \qquad \text{logo } P(1) \text{ é verdadeira}$$

Logo, $P(1)$ é verdadeira. Para verificar a condição PIF 2, devemos tomar um número natural positivo qualquer $k \in \mathbb{N}$ e mostrar que vale a implicação $P(k) \Rightarrow P(k+1)$. Em outras palavras, devemos supor que $P(k)$ é verdadeira (hipótese indutiva) e mostrar que $P(k+1)$ é verdadeira. Logo, a nossa hipótese indutiva é

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$$

Usando a hipótese de indução, queremos demonstrar $P(k+1)$, reescrevendo $P(k+1)$ e usando a hipótese indutiva temos:

$$\underbrace{\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}}_{\text{Por hipótese de indução } = k/k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)} =$$

$$= \frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$$

8 Queremos demonstrar que para todo $n \in \mathbb{Z}_+^*$ existe $m \in \mathbb{Z}^*$ tal que

$$2^{2n}-1 = 3m$$

Comecemos com verificar a condição PIF 1.

$$P(1) = 2^{2.1}-1 = 3\cdot 1$$

Vamos assumir que $P(k)$ é verdadeira, i.e., existe $m \in \mathbb{Z}^*$ tal que

$$2^{2k}-1 = 3.m$$

ou seja, vamos assumir que

$$2^{2k} = 3.m+1$$

Agora vamos demonstrar a implicação $P(k) \Rightarrow P(k+1)$. Reescrevendo $P(k+1)$ e usando a hipótese indutiva temos:

$$\begin{aligned}2^2(k+1)-1 &= 2^{2k+2}-1 && (3)\\ &= 4.22k-1 && (4)\\ &= 4.(3m+1)-1 && (5)\\ &= 12m+4-1 && (6)\\ &= 3(4m+1) && (7)\\ & && (8)\end{aligned}$$

E logo $2^2(k+1)-1$ é divisível por 3.