

Lista 4

Bases Matemáticas

Números Reais

1 — Considere os seguintes conjuntos. Diga quais são limitados superiormente e quais são limitados inferiormente. E se existir encontre o supremo e o ínfimo desses conjuntos:

- a) $A = \{1, 2, 4, 8, \dots\}$
- b) $B = \{1 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}$
- c) $C = \{1 - n! : n \in \mathbb{N}\}$
- d) $D = \{x \in \mathbb{Q} : 1 \leq x\}$
- e) $E = \{x \in \mathbb{Q} : 1 \leq x < 2\}$
- f) $F = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 3\}$
- g) $G = \{\frac{n}{1+n} : n \in \mathbb{N}\}$

2 — A partir dos axiomas A1, ..., A9 dos números reais prove as seguintes propriedades:

- a) O número 0 (zero) é o único elemento neutro da soma.
- b) O número 1 é o único elemento neutro da multiplicação.
- c) Dado qualquer $a \in \mathbb{R}$, resulta $a \cdot 0 = 0$
- d) Para quaisquer números reais a e b , tem-se que:

$$ab = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ ou } b = 0.$$

3 — Mostre, utilizando propriedades básicas, que:

- a) Se $ax = a$ para algum $a \neq 0$ então $x=1$.
- b) $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$.
- c) Se $x^2 = y^2$, então $x = y$ ou $x = -y$.
- d) $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$
- e) $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$

4 — Mostre que:

Se $a < b$ e $c < d$ então $a + c < b + d$.

- a) Se $a < b$ então $-b < -a$.
- b) Se $a < b$ e $c > d$, então $a - c < b - d$.
- c) Se $a < b$ e $c > 0$, então $ac < bc$.
- d) Se $a < b$ e $c < 0$, então $ac > bc$.
- e) Se $a > 1$ então $a^2 > a$.
- f) Se $0 < a < 1$ então $a^2 < a$.
- g) Se $0 \leq a < b$ e $0 \leq c < d$, então $ac < bd$.
- h) Se $0 \leq a < b$ então $a^2 < b < 2$.
- i) Se $a, b > 0$ e $a^2 < b^2$ então $a < b$.