

Lista 5

Bases Matemáticas

Um pouco de Álgebra

1 — Expanda:

- a) $(3a + 2b)^2$
- b) $(3a + 2b)^3$
- c) $(3a - 2b)^3$
- d) $(x^2 - 1)(x^2 + 1)$
- e) $[(x - y) + 1][(x - y) - 1]$
- f) $(a + b + c)^2$

2 — Se $a + \frac{1}{a} = b$ determine $a^2 + \frac{1}{a^2}$ em função de b
 $a^2 + \frac{1}{a^2} = b^2 - 2$

3 — Fatore

- a) $a^2x + b^2y + a^2y + b^2x$
- b) $2x^2 - x + 4xy - 2y$
- c) $4y^2 - 16$
- d) $(x + b)^2 - a^2$
- e) $x^2 - a^2 - 2ab - b^2$
- f) $x^3 + \frac{1}{x^3}$
- g) $x^6 + 1$
- h) $x^2 - 6x + 9 - y^2$

4 — Escreva cada expressão usando apenas um radical e simplifique:

- a) $\sqrt{\sqrt{x}}$
- b) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}$
- c) $\sqrt{\sqrt[3]{5x^2}}$

d) $\sqrt{x}\sqrt[3]{x}$

e) $\frac{\sqrt[5]{xy}}{\sqrt[3]{xy}}$

f) $\frac{\sqrt[5]{xy}}{\sqrt[3]{y}\sqrt{y}}$

g) $\sqrt[5]{81x^2y^6\sqrt{27a^2b^{-1}}}$

5 — Simplifique as expressões:

a) $\frac{a^{3/5}a^{2/7}}{a^{1/3}}$

b) $\frac{a^{2/5}b^{3/4}(3a)^2}{b^{3/5}a^{1/3}}$

c) $\frac{(x^9y^6)^{-1/3}}{(x^6y^4)^{-1/2}}$

d) $\frac{(a^2b^4)^{1/2}}{(81a^6b^9)^{1/3}}$

6 — Simplifique as expressões:

a) $\frac{4x^3y^2}{(x-2)^4} \cdot \frac{6x^2y}{(x-2)^{3/2}}$

b) $\frac{\frac{x^2-y^2}{3x^2y^5}}{\frac{y+x}{x+y}}$

c) $\frac{\frac{1}{(x+h)^2} - \frac{1}{x^2}}{h}$

d) $\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{\frac{b}{a} - \frac{a}{b}}$

e) $\frac{(z+w)^{-1}}{(z-w)^{-1}}$

f) $(p^{-1} + q^{-1})^{-1}$

7 — Realize as seguintes divisões de polinômios:

- a) $5x^2 + 4x + 2 \div 6x + 2$
- b) $x^2 + x - 2 \div x - 1$
- c) $x^2 - a^2 \div x - a$
- d) $x^4 - 256 \div x - 4$
- e) $x^4 - a^4 \div x - a$
- f) $x^5 + x^3 - 2 \div x - 1$
- g) $4x^3 + 2x + 1 \div x + 1$
- h) $x^3 \div x - a$

8 — Escrever o seguinte sem utilizar sinais do valor absoluto, separando em casos quando seja necessário.

- a) $||x| - 1|$
- b) $a - |a - |a||$

9 — Mostre que $|a| = |-a|$

10 — Mostre que $|a| \leq b$ se e somente se $-b \leq a \leq b$.

11 — Encontrar todos os números x tais que

- a) $|x - 3| = 8$
- b) $|x - 1| \cdot |x + 1| = 0$
- c) $|x - 1| \cdot |x + 2| = 3$

12 — Mostre que:

- a) $|xy| = |x||y|$
- b) $|\frac{1}{x}| = \frac{1}{|x|}$, se $x \neq 0$.
- c) $|x - y| \leq |x + y|$
- d) $|x| - |y| \leq |x - y|$
- e) $||x| - |y|| \leq |x - y|$
- f) $|x + y + z| \leq |x| + |y| + |z|$.

13 — Mostre que:

- a) $(x + y)^2 = x^2 + y^2$ se e somente se $x = 0$ ou $y = 0$
- b) $(x + y)^3 = x^3 + y^3$ se e somente se $x = 0$ ou $y = 0$ ou $x = -y$

14 — Resolva as seguintes igualdades:

- a) $\frac{x}{x-2} + \frac{4}{x-1} = 5$
- b) $\frac{2}{x^2-1} - \frac{x}{x-1} = 1$
- c) $|x| = -x + 2$
- d) $|-x + 2| = 2x + 1$
- e) $|x + 1| + |x - 2| = 1$
- f) $|5x - x^2 - 6| = x^2 - 5x + 6$
- g) $|x - 1| - 2|x - 2| + 3|x - 3| = 4$
- h) $|x^2 - 2| + 2x + 1 \geq 0$
- i) $\frac{9}{|x-5|-3} \geq |x-2|$
- j) $\sqrt{x+1} = 8 - \sqrt{3x+1}$
- k) $1 + \sqrt{3x+5} = x$
- l) $\sqrt{4x-3} + \sqrt{5x-1} = \sqrt{15x+4}$
- m) $\sqrt[3]{x+34} - \sqrt[3]{x-3} = 1$

15 — Encontrar todos os números x tais que:

- a) $4 - x < 3 - 2x$
- b) $5 - x^2 < 8$
- c) $5 - x^2 < -2$
- d) $(x - 1)(x - 3) > 0$
- e) $x^2 - 2x + 2 > 0$
- f) $x^2 - x + 10 > 16$
- g) $\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} > 0$
- h) $\frac{x-1}{x+1} > 0$
- i) $|x - 3| < 8$
- j) $|x + 4| < 2$

k) $|x - 1| + |x - 2| > 1$

l) $|x - 1| + |x + 1| < 2$

m) $|x - 1| + |x + 1| < 1$

16 — Mostre que

a) Se $|x - 3| < \frac{5}{1000}$ e $|y - 1| < \frac{5}{1000}$, então $|(x + y) - 4| < \frac{1}{100}$ e $|(x - y) - 2| < \frac{1}{100}$.

b) Se $|x - x_0| < \frac{\epsilon}{2}$ e $|y - y_0| < \frac{\epsilon}{2}$, então $|(x + y) - (x_0 + y_0)| < \epsilon$ e $|(x - y) - (x_0 - y_0)| < \epsilon$.

17 — Resolva as seguintes desigualdades:

a) $|x - 2| - |x + 2| > 2$

b) $|x - 2| - x|x + 2| < 1$

c) $\frac{1}{2 - x} + \frac{5}{2 + x} < 1$

d) $\frac{2x - 5}{x^2 - 6x - 7} < \frac{1}{x - 3}$

e) $(x + 1)(3 - x)(x - 2)^2 \geq 0$

f) $\frac{2 - x^2}{1 - x} < x$

g) $\sqrt{1 - 3x} - \sqrt{5 + x} > 1$

h) $\sqrt{4 - \sqrt{1 - x}} - \sqrt{2 - x} > 0$