Lista 7
Bases Matemáticas

Funções II

1 — Dadas as funções $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $g(x) = \pi[\![x]\!]$, determine os domínios e as imagens das funções compostas $f \circ g$ e $g \circ f$.

2 — Denotando por $\imath$ a função identidade, mostre que para toda função f vale que:

a) $\imath \circ f = f$ e $f \circ \imath = f$

b) Se f é inversível, então $f \circ f^{-1} = \imath$ e $f^{-1} \circ f = \imath$

Em tempo, isso significa que a função identidade cumpre o papel de *elemento neutro* da operação de composição de funções.

3 — Para as funções abaixo encontre $f(x+2)$, $f(-x)$, $f(x+h)$ e $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, sendo $h \neq 0$:

a) x

b) $3x + 4$

c) x^2

d) $5x^2 + 1$

e) $x^2 - x$

f) $x^3 + x^2$

4 —

a) Como o gráfico de $f(|x|)$ está relacionado como o gráfico de $f(x)$?

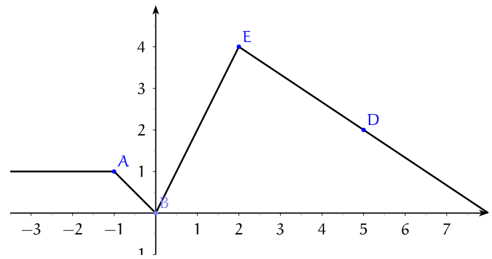
b) Esboce o gráfico de $|x|^3$.

c) Esboce o gráfico de $-|x|^5$.

d) Esboce o gráfico de $\operatorname{sen}(|x|)$

e) Esboce o gráfico de $\cos(|x|)$

5 — Encontre uma expressão para a função cujo gráfico é a curva abaixo:



6 — Para cada par de funções $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : B \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ abaixo, determine os domínios máximo de definição de $f(x)$, $g(x)$,$(f+g)(x)$, $f(x)g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$, $(f \circ g)(x)$ e $(g \circ f)(x)$ e finalmente as expressões para $(f \circ g)(x)$ e $(g \circ f)(x)$:

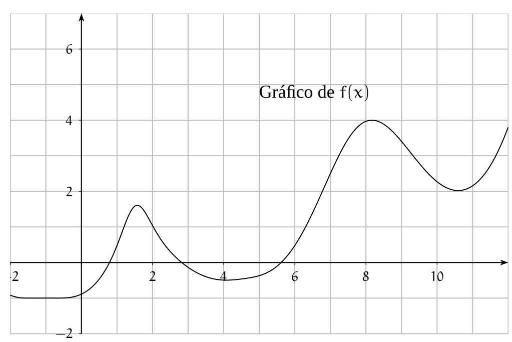
a)$f(x) = \sqrt{(x+2)}$ e $g(x) = |x|$

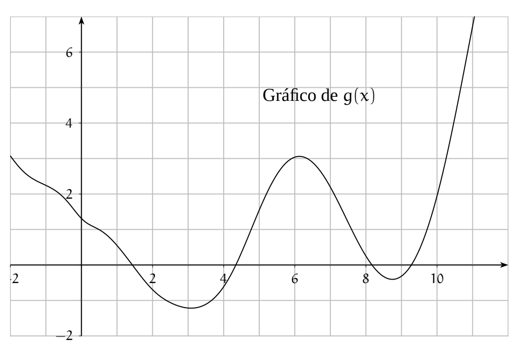
b)$f(x) = \frac{1}{x(x-2)}$ e $g(x) = x^2$

c)$f(x) = \frac{1}{x(x-2)}$ e $g(x) = \sqrt{x}$

d)$f(x) = \sqrt[5]{x^3}$ e $g : 2^{-x}$

7 — Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções cujos gráficos estão apresentados a seguir





A partir desses gráficos, esboce o gráfico das seguintes funções:

a) $2f(x)$
b) $2g(x)$
c) $-f(x)$
d) $-g(x)$
e) $f(-x)$
f) $g(-x)$
g) $f(|x|)$
h) $g(|x|$
i) $f(-|x|)$
j) $\frac{1}{2}g(x)+1$
k) $-\frac{1}{2}g(x)+1$
l) $-\frac{1}{2}|g(x)|+1$
m) $f(\frac{1}{2}x)$
n) $||f(x)|-1|$
o) $(f+g)(x)$
p) $(f-g)(x)$
q) $(f+g)(|x|)$

8 — Esboce o gráfico das seguintes funções, utilizando o gráfico de uma função mais simples e aplicando as transformações apropriadas. Para cada uma dessas funções indique as intersecções com os eixos x e y, as regiões nas quais as funções são positivas, negativas, crescentes, decrescentes e os pontos de máximo e mínimo local se existirem.

a) $|2x|+1$
b) $(x+3)^4$
c) $(x+3)^4-1$
d) $|(x+3)^4-1|$
e) $|(x+3)^4-1|-1$
f) $|x-1|+1$
g) $\cos|x-1|$
h) $|2x^2-1|$
i) $|2x^2-1|-1$
j) $||2x^2-1|-1|-2$
k) $|(x-4)^6-2|$
l) $\operatorname{sen}(2x)+3$
m) $-2|\operatorname{sen}(2x)+3|+1$
n) $\sqrt{|x+2|}$
o) $2\cos(3x+\pi)$
p) $1+\cos(|x-1|)$
q) $2^{(x-\pi)}$
r) $2^{(x-\pi)}-5$
s) $5^{|x|}$
t) $5^{|x+2|}$
u) $|3^x-5|$
v) $f(x)=\begin{cases} x, \text{ se } x<0 \\ \frac{x}{2}+1, \text{ se } x\geq 0\end{cases}$
w) $f(x)=\begin{cases} \cos(2x), \text{ se } x<1 \\ 2\cos(x-1), \text{ se } x\geq 1\end{cases}$
x) $f(x)=\begin{cases} x^2-5x, \text{ se } |x^2-1|+1<0 \\ \cos(3x), \text{ se } |x^2-1|+1\geq 0\end{cases}$

9 — Para cada par de funções f, g abaixo encontre o domínio e as expressões de $f\circ g$, $f\circ f$, $g\circ f$ e $g\circ g$.

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \quad f(x)=x^3$
$g:[1,\infty)\to\mathbb{R}, \quad g(x)=\sqrt{x-1}$

b) $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}, \quad f(x)=-\frac{1}{x}$
$g:(-\infty,2]\to\mathbb{R}, \quad g(x)=\sqrt{2-x}$

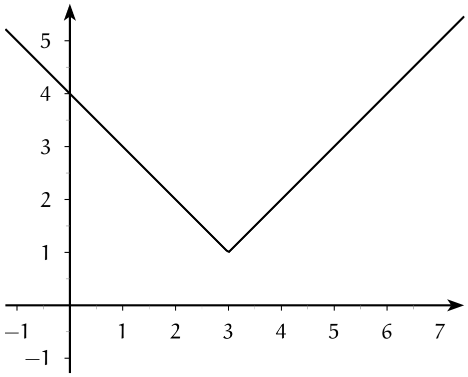
c) $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}, \quad f(x)=\frac{1}{x}$
$g:\mathbb{R}\backslash\{2,3\}\to\mathbb{R}, \quad g(x)=\frac{1}{(x-2)(x-3)}$

d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \quad f(x)=\operatorname{sen}(x)$
$g:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}, \quad g(x)=\sqrt{x}$

10 — Para as seguintes funções $h(x)$, decomponha-a como compostas de funções mais simples¿

a) $h(x)=\sin(x^2)$
b) $h(x)=\sin(x+x^2)$
c) $h(x)=\operatorname{cosec}(\cos(x))$
d) $h(x)=\sin(\frac{\cos(x)}{x})$
e) $h(x)=\sec((x+1)^2(x+2))$
f) $h(x)=\sin((\sin^7(x^7+1))^7)$
g) $h(x)=\tan(x^2+\sin(x^2+(\cos^2(x))))$
h) $h(x)=\sqrt{1-x^2}$
i) $h(x)=\sin(\cos(\frac{ax+b}{cx+d}))$
j) $h(x)=\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}}$
k) $h(x)=\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}$
l) $h(x)=x^{x^x}$
m) $h(x)=e^{2x}$
n) $h(x)=e^{\sqrt{1+x}}$
o) $h(x)=\ln(2+\frac{1}{x})$
p) $h(x)=2e^{x+1}$
q) $h(x)=\tan(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}})$

11 — Dado o seguinte gráfico:

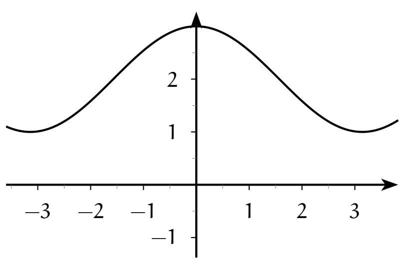


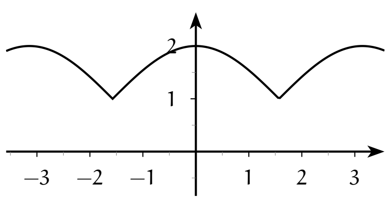
a) Se soubermos que o gráfico anterior é o gráfico de $f(x+1)+2$ como é o gráfico de $f(x)$?

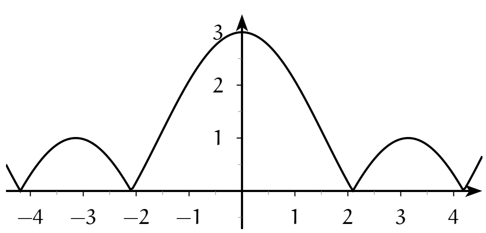
b) Se soubermos que o gráfico anterior é o gráfico de $|f(x)|+1$ como é o gráfico de $f(x)$?

c) Se soubermos que o gráfico anterior é o gráfico de $|f(x)+1|$ como é o gráfico de $f(x)$?

12 — Os seguintes gráficos foram obtidos a partir do grafico da função $f(x) = \cos(x)$ através de translações, homotetias e módulos. Qual função que representa cada um dos gráficos a seguir:

a) 

b) 

c) 

13 — Encontre o domínio máximo de definição e esboce o gráfico das seguintes funções,, utilizando o gráfico de uma função mais simples e aplicando as transformações apropriadas. Para cada uma dessas funções indique as intersecções com os eixos x e y, as regiões nas quais as funções são positivas, negativas, crescentes, decrescentes e os pontos de máximo e mínimo local se existirem.

a) $\frac{1}{x+7}$

b) $\frac{1}{x^2+4x+4}$

c) $\frac{x+2}{x^2-1}$.

d) $\sqrt{|t-1|-1}$

e) $\log_3(x-2)$

f) $\log_2(|x|)$

g) $\log_2(2x-|x-1|)$

h) $\tan(x+\pi)$

i) $\tan(-x)+2$

j) $|\tan(x)|$

k) $\tan(|x|)$

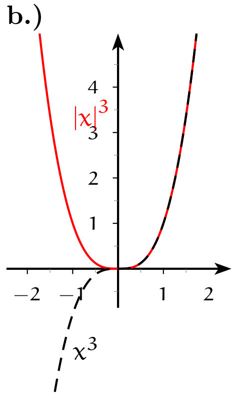
l) $\tan(2x-|x-1|)$

Respostas dos Exercícios

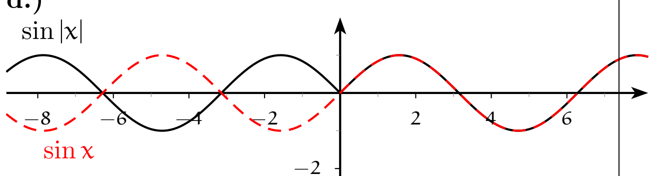
3 a.) $f(x)=x$, $f(x+2)=x+2$, $f(-x)=-x$ e $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{x+h-x}{h}=1$ **d.)** $f(x)=5x^2+1$, $f(x+2)=5(x+2)^2+1$, $f(-x)=5(-x)^2+1=5x^2+1$ e $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{5(x+h)^2+1-5x^2-1}{h}=\frac{5xh+h^2}{h}=5x+h$

4 a.) O gráfico de $f(|x|)$ coincide com o gráfico de $f(x)$ para $x\geq 0$, isto é, do lado direito do eixo y. Para $x<0$, o gráfico de $f(|x|)$ é a reflexão do gráfico de $f(x)$ relativamente ao eixo y.

b.)



d.)



5 O gráfico corresponde à função

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{se} \quad x<-1 \\ -x & \text{se} \quad -1\leq x<0 \\ 2x & \text{se} \quad 0\leq x<2 \\ \frac{-2x+16}{3} & \text{se} \quad 2\leq x \end{cases}$$

6

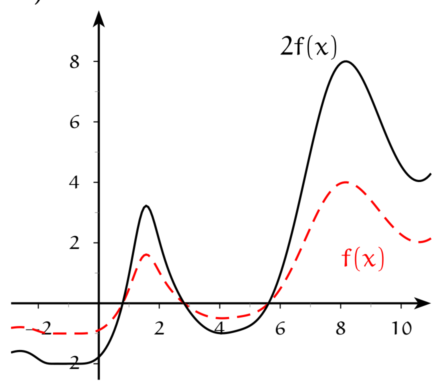
1. $\mathrm{Dom}\, f=[-2,+\infty)$, $\mathrm{Dom}\, g=\mathbb{R}$, $\mathrm{Dom}(f+g)=\mathrm{Dom}\, fg=[-2,+\infty)$;
   $\mathrm{Dom}\, f\circ g=\mathbb{R}$, $\mathrm{Dom}\, g\circ f=[-2,+\infty)$ e
   $(f\circ g)(x)=\sqrt{|x|+2}$; $(g\circ f)(x)=\sqrt{x+2}$

2. $\mathrm{Dom}\, f=\mathbb{R}\backslash\{0,2\}$, $\mathrm{Dom}\, g=\mathbb{R}$, $\mathrm{Dom}(f+g)=\mathrm{Dom}\, fg=\mathbb{R}\backslash\{0,2\}$;
   $\mathrm{Dom}\, f\circ g=\mathbb{R}\backslash\{0,-\sqrt{2},\sqrt{2}\}$, $\mathrm{Dom}\, g\circ f=\mathbb{R}\backslash\{0,2\}$ e
   $(f\circ g)(x)=\frac{1}{x^2(x^2-2)}$; $(g\circ f)(x)=\frac{1}{x^2(x-2)^2}$

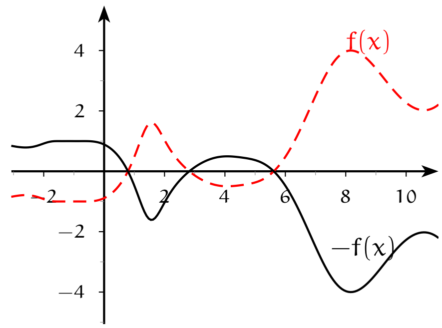
3. $\mathrm{Dom}\, f=\mathbb{R}\backslash\{0,2\}$, $\mathrm{Dom}\, g=\mathbb{R}_+$, $\mathrm{Dom}(f+g)=\mathrm{Dom}\, fg=\mathbb{R}_+\backslash\{0,2\}$;
   $\mathrm{Dom}\, f\circ g=\mathbb{R}_+\backslash\{0,4\}$, $\mathrm{Dom}\, g\circ f=\mathbb{R}^*$ e
   $(f\circ g)(x)=\frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}$; $(g\circ f)(x)=\frac{1}{\sqrt{x(x-2)}}$

4. $\mathrm{Dom}\, f=\mathbb{R}$, $\mathrm{Dom}\, g=\mathbb{R}$, $\mathrm{Dom}(f+g)=\mathrm{Dom}\, fg=\mathbb{R}$;
   $\mathrm{Dom}\, f\circ g=\mathbb{R}$, $\mathrm{Dom}\, g\circ f=\mathbb{R}$ e
   $(f\circ g)(x)=\sqrt[5]{2-\S}$; $(g\circ f)(x)=2^{-\sqrt[5]{x^3}}$

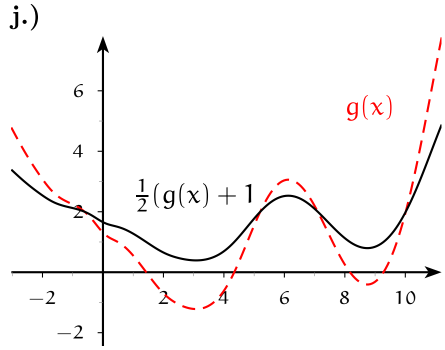
7 a.)



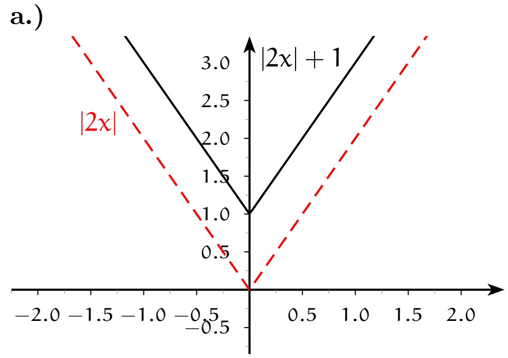
b.)



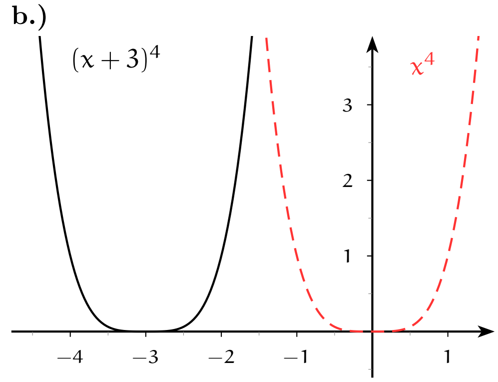
j.)



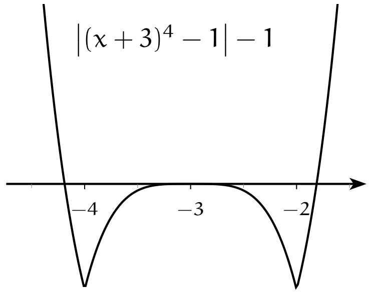
8 a.)



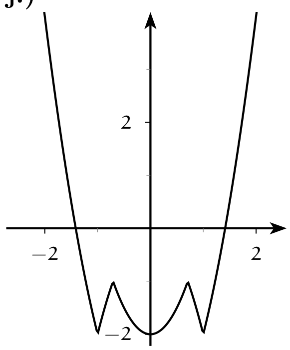
b.)



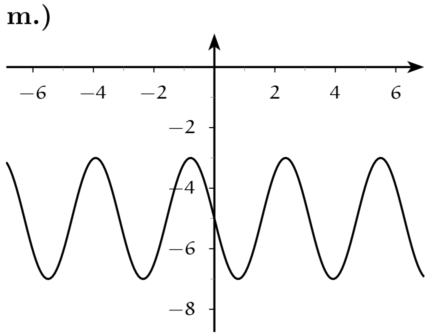
e.)



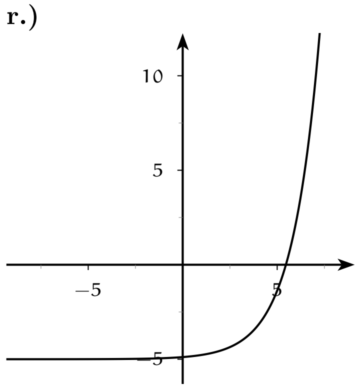
j.)



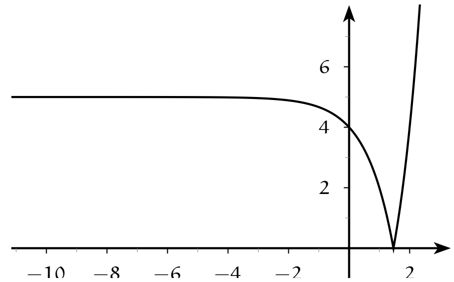
m.)



r.)

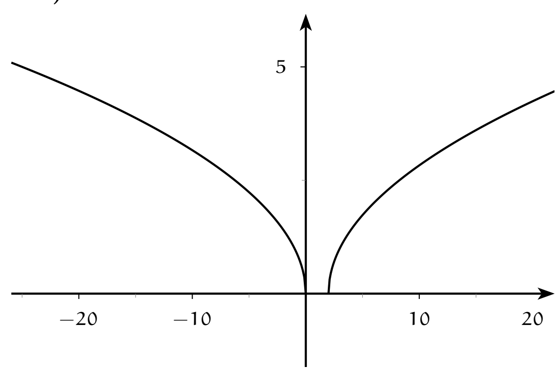


u.)



12 **a.)** $\cos(x)+2)$
b.) $|\cos(x)|+1$
c.) $|2\cos(x)+1|$

13 **d.)**



l.)