Bases Matemáticas – Prova I

Ex. 1 — Defina, usando linguagem simbólica, o que é $A \setminus B$.
Comentário: A definição é
$$A \setminus B = \{\, x \in a \mid x \notin B \,\}$$

Ex. 2 — Leia a demonstração do seguinte Teorema e identifique a falha.
Teorema: $1 = 2$
Prova: Sejam a e b dois números iguais. Multiplicando ambos os lados de "$a = b$" por a obtemos
$$a^2 = ab.$$
Subtraindo b^2 de ambos os lados,
$$a^2 - b^2 = ab - b^2.$$
Fatorando,
$$(a+b)(a-b) = b(a-b).$$
Subtraindo $(a-b)$, temos
$$a + b = b.$$
Quando a e b valem 1, temos que
$$1 + 1 = 1$$
e a demonstração está concluída. $\square$
Comentário: Primeiro, onde se lê "subtraindo" deve-se ler "multiplicando por". Além disso, $(a-b) = 0$, e o máximo que se pode concluir é que $0 = 0$.

Ex. 3 — Explique a diferença entre as duas proposições abaixo, e diga porque uma delas é verdadeira e a outra falsa.

a)$\forall a, \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R} : \forall c \in \mathbb{R}, ab = c$

b)$\forall a, \in \mathbb{R}, \forall c \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R} : ab = c$

Comentário: A primeira está errada, porque diz que para qualquer a existe um b, tal que ab é igual a todos os possíveis $c \in \mathbb{R}$. A segunda está certa, porque diz que podemos encontrar *um* $b = a/c$. Vale notar que a deve ser diferente de zero.

Ex. 4 — Prove que para quaisquer conjuntos A e B, $(A \cap B) \subset (A \cup B)$.
Comentário: Deve-se lembrar que $A \cap B$ é $\{\, x : x \in A \text{ e } x \in B \,\}$; $A \cup B$ é $\{\, x : x \in A \text{ ou } x \in B \,\}$. Assim, se x está em A *e* também está em B, deve estar em A. Se está em A, está em A *ou* em B, e pertence a $A \cup B$.

Ex. 5 — Fixe dois números naturais a e b. Mostre que para todo n inteiro maior que um, $(a-b) \mid (a^n - b^n)$.
Comentário: Quando dizemos "fixe dois números", isso significa "para quaisquer a e b que se queira fixar". A base de indução é para $n = 1$: $(a-b) \mid (a-b)$

No passo, presuma que $(a-b) \mid (a^k - b^k)$, ou seja, há z inteiro tal que $a^k - b^k = z(a-b)$ faça

$$\begin{aligned}
a^{k+1} - b^{k-1} &= aa^k - bb^k \\
&= aa^k + \big[-ab^k + ab^k\big] - bb^k \\
&= a(a^k - b^k) + ab^k - bb^k \\
&= a[z(a-b)] + ab^k - bb^k \\
&= az(a-b) + b^k(a-b) \\
&= (az + b^k)(a-b) \\
&= w(a-b).
\end{aligned}$$

Note que podemos garantir que z e w são inteiros.

Questão extra:

Ex. 6 — Prove o seguinte Teorema por indução.
Teorema: Sejam $X, X_1, X_2, \cdots, X_n$ conjuntos. Então

$$X \cap (X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n) = (X \cap X_1) \cup (X \cap X_2) \cup \cdots \cup (X \cap X_n).$$