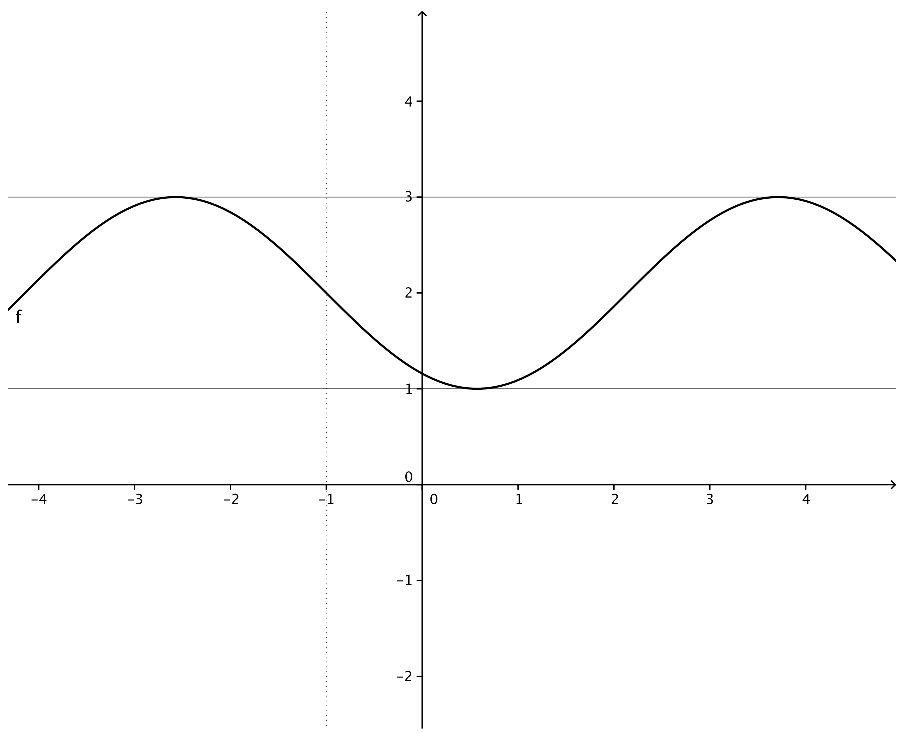
Bases Matemáticas – Prova II

Ex. 1 — Defina sequência.

Ex. 2 — Esboce o gráfico da função $f(x) = |2 - \operatorname{sen}(x+1)|$



Ex. 3 — Diga se as funções a seguir são injetoras, sobrejetoras ou bijetoras, e explique o motivo.

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$, tal que $f(x) = \lfloor x \rfloor / 2$

b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $g(x) = \frac{x}{|x|}(x^2 - 4)$

Comentário: (a) não é injetora porque $f(2.5) = f(2.2) = 1$. Também não é sobrejetora, porque nem todo racional é igual a algum inteiro dividido por 2 (veja que chão de x sempre é inteiro).
(b) em primeiro lugar, deve-se corrigir o domínio: é R^*, porque não podemos dividir pode zero. É sobrejetora: para $x > 0$,

$$\frac{x}{|x|}(x^2 - 4) = (x^2 - 4)$$

e podemos representar qualquer número maior que -4 (basta resolver $x^2 - 4 = y$). Quando $x < 0$, temos

$$\frac{x}{|x|}(x^2 - 4) = (-1)(x^2 - 4)$$

e representamos qualquer número menor que 4.
Da discussão anterior já é possível perceber que a função não é injetora: $g(2) = g(-2) = 0$.

Ex. 4 — Qual é a imagem da função $f(x) = 2\lfloor \operatorname{sen}(x) \rfloor$?
Comentário: seno sempre fica entre -1 e $+1$. Tomando o chão, teremos -1, zero ou $+1$. Multiplicando por dois, temos

$$\{-2, 0, +2\}$$

Para quem leu "módulo" ao invés de "chão" a resposta deve ser: – seno entre -1 e $+1$; com módulo, entre zero e um. Multiplicando por dois,

$$[0, 2]$$

(fechado em ambas as extremidades).
De qualquer maneira, *Cuidado com a leitura de chão e módulo!*

Ex. 5 — Sejam

$$f(x) = \frac{1}{x}$$
$$g(x) = \sqrt{x^2 - x}.$$

a) Determine $f \circ g$ e $g \circ f$.

b) Diga qual é o domínio de $f \circ g$.
Comentário: (a)

$$\begin{aligned} f \circ g &= \frac{1}{\sqrt{x^2 - x}}, \\ g \circ f &= \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}}. \end{aligned}$$

(b) Trabalhando com duas restrições:

i) $x^2 - x \geq 0$

ii) $\sqrt{x^2 - x} \neq 0$

(i) nos dá x $x \leq 0$ **ou** $x \geq 1$, (ii) nos dá $x \neq 0$ **e** $x \neq 1$.
portanto é necessário que $x < 0$ **ou** $x > 1$.

Ex. 6 — Diga se (a_n) é crescente, decrescente (ou nenhum dos dois), e se é limitada superiormente ou inferiormente:

$$a_n = \frac{2n-5}{5n+4}$$

Comentário: É crescente:

$$\begin{aligned} a_n &< a_{n+1} \\ \frac{2n-5}{5n+4} &< \frac{2(n+1)-5}{5(n+1)+4} \\ \frac{2n-5}{5n+4} &< \frac{2n-3}{5n+9} \\ 10n^2-7n-45 &< 10n^2-7n-12 \\ -45 &< -12. \end{aligned}$$

Como é crescente, deve ser limitada inferiormente por seu primeiro termo, $a_1 = -3$.
Não é necessário calcular o limite superior, mas ele é igual a $2/5$.

Ex. 7 — (**Questão extra**) A sequência dada por

$$a_n = \left(-\frac{\cos^2(n)}{n}\right)^n + \frac{(\text{sen}\,(n))^{2n}}{n^n(-1)^n}$$

é crescente? Decrescente? Limitada?
Comentário: Se quadrado de seno e quadrado de cosseno aparecem, obviamente devemos tentar usar $\text{sen}\,^2 x + cos^2 x = 1$.
Agora vale apena observar os "truques" usados em cada passagem. Começamos identificando que no segundo termo tanto o numerador como o denominador estão elevados a n; depois observamos que temos essencialmente o mesmo denominador, e assim por diante.

$$\begin{aligned} a_n &= \left(-\frac{\cos^2(n)}{n}\right)^n + \frac{(\text{sen}\,(n))^{2n}}{n^n(-1)^n} \\ &= \left(-\frac{\cos^2(n)}{n}\right)^n + \left(\frac{(\text{sen}\,(n))^2}{n(-1)}\right)^n \\ &= \left(\frac{-\cos^2(n) - \text{sen}\,^2(n)}{n}\right)^n \\ &= \left(-\frac{\cos^2(n) + \text{sen}\,^2(n)}{n}\right)^n \\ &= (-1)^n\left(\frac{\cos^2(n) + \text{sen}\,^2(n)}{n}\right)^n \\ &= (-1)^n\frac{1^n}{n^n} \\ &= (-1)^n\frac{1}{n^n}. \end{aligned}$$

Como n^n é estritamente crescente e $n \geq 1$, então $1/(n^n)$ é decrescente. Mas como $1/(n^n)$ é positivo e a está multiplicado por $(-1)^n$, a sequência oscilará entre positivos e negativos e não é crescente nem decrescente. No entanto, é limitada: O primeiro termo é $(-1)(1/1) = -1$; o segundo é $(+1)(1/2^2) = 1/4$. Assim,

$$-1 \leq a_n \leq 1/4.$$