Bases Matemáticas – Prova III

Comentário: Para as questões sobre limites, derivadas e Cálculo em geral, vale a pena dar uma olhada no Wolfram Alpha: `http://www.wolframalpha.com`. Entre algum limite, derivada ou integral e veja o resultado. Você pode clicar em "show steps" para ver os passos.

Ex. 1 — Explique o que significa uma função ser contínua em um ponto.
Comentário: veja nas notas de aula.

Ex. 2 — Sabemos que a derivada de $f(x) = x^3$ é $f'(x) = 3x^2$. Explique isto geometricamente: o que acontece com a reta tangente à curva $f(x)$?
Comentário: o importante era explicar que a inclinação da reta tangente a x^3 varia à medida que x varia – e esta variação é dada por $3x^2$, que é a derivada de f.

Ex. 3 — Determine os limites das sequências quando $n \to \infty$:

a) $b_n = \frac{3n+5}{2n-7} + \frac{9}{n}$
Comentário: este é simples, dá 3/2.

b) $c_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$
Comentário: vimos algo parecido em sala de aula: a sequência $(-1)^n$ anterna entre -1 e $+1$, e *é limitada.* Já $\sqrt{n}$ tem limite igual a $+\infty$. Assim, o limite de c_n é zero.

Ex. 4 — Calcule os limites das funções (use o Teorema do Confronto no item (c)):

a) $\lim_{x\to\infty} \frac{x-1}{2x+4}$
Comentário: este é fácil, igual a 1/2.

b) $\lim_{x\to 2} \sqrt{\frac{x^4-2}{5x^3+x}}$
Comentário: este é muito fácil também! Basta substituir o 2 e verificar se a raiz não é negativa. O limite é $1/\sqrt{3}$ (ou $(\sqrt{3})/3$, mesma coisa).

c) $\lim_{x\to\infty} \frac{2^{\cos x}}{\ln x}$
Comentário: Sabemos que $-1 \leq \cos(x) \leq +1$. Daí simplesmente elevamos dois a todas as partes da inequação, obtendo

$$2^{-1} \leq 2^{\cos x} \leq 2$$

Dividimos por $\ln(x)$ (como queremos o limite no infinito, podemos desprezar os valores abaixo de zero).

$$\frac{2^{-1}}{\ln(x)} \leq \frac{2^{\cos x}}{\ln x} \leq \frac{2}{\ln x}$$

Como $(0.5)/x$ e $2/x$ tendem a zero, então pelo Teorema do Confronto

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2^{\cos x}}{\ln x} = 0$$

d) $\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{(1-x)}$
Comentário: Há dois fatos a observar:

a) Quando x tende a 1 pela direita, x sempre é positivo, e $\frac{1}{(1-x)}$ sempre é negativo.
b) Quando x tende a 1 pela direita, a função $g(x) = 1 - x$ tende a zero. O recíproco, $1/(1-x)$, deve tender a $+\infty$ ou $-\infty$.

Juntando (a) com (b), temos que o limite é então $-\infty$.

Ex. 5 — Determine as derivadas das funções:

a) $\frac{d}{dx} 3x^2 - \cos(x)$
Comentário: Fácil. $6x + \operatorname{sen}(x)$ (lembre que a derivada do cosseno é $-\operatorname{sen}(x)$).

b) $\frac{d}{dx}\text{sen}\,(e^x) + 1$
Comentário: Fácil, usando a regra da cadeia. O resultado é $e^x \cos(e^x)$. (Lembre que $d/dx\ \ e^x = e^x$).

c) $\frac{d}{dx}\frac{x^3+\ln x}{\sqrt{x}}$
Comentário: Esta dá um pouco mais de trabalho. Pode-se começar com a regra do quociente ou também observar que

$$\frac{a}{b} = \left(\frac{1}{b}\right)\ a$$

e usar a regra do produto:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\frac{x^3+\ln x}{\sqrt{x}} &= \frac{d}{dx}\left(x^3+\ln x\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \\
&= \left(2x^3+\ln x\right)\left(-\frac{1}{2x^{3/2}}\right) + \left(3x^2+\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \\
&= \frac{5x^3-\ln(x)+2}{2x^{3/2}}
\end{aligned}$$

d) $\frac{d}{dx}\text{sen}\,(1/x)\cos(x^2+4)$
Comentário: Comece com a regra do produto:

$$\text{sen}\,(1/x)\left[\cos(x^2+4)\right]' + \left[\text{sen}\,(1/x)\right]'\cos(x^2+4)$$

Depois use a regra da cadeia:

$$\text{sen}\,(1/x)\left[-\text{sen}\,(x^2+4)(2x)\right] + \left[\cos(1/x)\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right]\cos(x^2+4)$$

Agora basta reorganizar tudo e chegar a

$$\left(\text{sen}\,(x^2+4)\text{sen}\,(\frac{1}{x}) + \frac{\cos(x^2+4)\cos(\frac{1}{x})}{x^2}\right)$$

Ex. 6 — (EXTRA) Determine a derivada:

$$\frac{d}{dx}\frac{\text{sen}\,\left(\sqrt{\pi^{\ln(2x)}}\right)}{\cos(x^3-\frac{2}{x})}$$

Comentário: Este é trabalhoso! Comece com a regra do quociente (ou produto, como na questão 5.c). Depois a regra da cadeia, e prossiga usando as regras de derivação. Depois de uma longa e tediosa sequência de passos, você chegará ao resultado final:

$$\begin{aligned}
&\frac{\left(\pi^{\ln(x)}+\ln(\pi)\pi^{\ln(x)}\right)\sec\left(\frac{2}{x}-x^3\right)\cos\left(\sqrt{2x\pi^{\ln(x)}}\right)}{\sqrt{2\pi^{\ln(x)}}} \\
+&\left(-3x^2-\frac{2}{x^2}\right)\tan\left(\frac{2}{x}-x^3\right)\sec\left(\frac{2}{x}-x^3\right)\text{sen}\,\left(\sqrt{2x\pi^{\ln(x)}}\right)
\end{aligned}$$

mas para quem conseguiu fazer pelo menos metade, já valeu!