# Bases Matemáticas – Prova I

**Critérios para avaliação:** Clareza, corretude, rigor e concisão. (i) A redação das respostas deve ser clara. (ii) Todo o raciocínio desenvolvido na resposta deve estar correto. (iii) O nível de rigor nas respostas deve ser próximo ao usado nas aulas. (iv) As respostas não devem ser desnecessariamente longas.

**Ex. 1** — Ache a contrapositiva, a recíproca e a inversa de "Se $c$ divide $a$ e $c$ divide $5a+3b$, então deve ser verdade que $c|b$ ou que $c=3$".

**Comentário:**

Contrapositiva: *Se $c \not| a$ e $c \neq 3$, então $c$ não pode dividir tanto $a$ como $5a+3b$.*

Recíproca: *Se $c|b$ ou $c=3$ então $c$ divide $a$ e $c$ divide $5a+3b$.*

Inversa: *Se $c$ não pode dividir tanto $a$ como $5a+3b$ então $c \not| a$ e $c \neq 3$*

**Ex. 2** — Prove que $\forall n \in \mathbb{N}, n > 1$ é verdade que

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \ldots + (n) \times (n+1) = \frac{(n)(n+1)(n+2)}{3}$$

**Comentário:** Base: para $n = 2$,

$$1 \times 2 + 2 \times 3 = 8 = \frac{(2)(2+1)(2+2)}{3}$$

Passo: Nossa hipótese de indução é

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \ldots + (k) \times (k+1) = \frac{(k)(k+1)(k+2)}{3}$$

Agora queremos provar que a igualdade vale para $k+1$. O *lado direito*, escrito para $k+1$, é

$$\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

Então,

$$\begin{aligned}
&\underbrace{1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \ldots + (k) \times (k+1)} + (k+1) \times (k+2) \\
&= \frac{(k)(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2) \\
&= \frac{(k)(k+1)(k+2) + 3(k+1)(k+2)}{3} \\
&= \frac{(k+3)(k+1)(k+2)}{3}
\end{aligned}$$

**Ex. 3** — Prove que entre dois números irracionais sempre há um outro número irracional.
**Comentário:** Sejam $x, y \notin \mathbb{Q}$ (ambos reais). Suponha que não haja irracionais entre $x$ e $y$ (provaremos por redução ao absurdo). Tome um número $z$, entre $x$ e $y$, mas cuja distância de $y$ seja um racional $d$. Então $z = y - d$. Como $z$ e $d$ são racionais, fazemos $z = a/b$ e $d = m/n$.

$$\begin{aligned} z &= y - d \\ \frac{a}{b} &= y - \frac{m}{n} \\ \frac{a}{b} + \frac{m}{n} &= y \\ \frac{an + bm}{bn} &= y \end{aligned}$$

e $y$ seria racional – absurdo.

**Ex. 4** — Considere a função $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, com $f(x) = (x+1)^2 + \sqrt{x}$.

a) Diga se $f$ é injetora e se é sobrejetora (justificando sua resposta).

b) Qual é a imagem de $f$?

**Comentário:** $f$ não é sobrejetora, porque não existe $x \in \mathbb{R}_+$ tal que $f(x) = 0.5$.
$f$ é injetora. Para cada elemento $y$ do domínio, há somente um $x$ tal que $f(x) = y$. Se $f(a) = f(b)$, então

$$a^2 + 2a + \sqrt{a} = b^2 + 2b + \sqrt{b}$$

e $a$ deve ser igual a $b$. (Este não era necessário demonstrar com detalhes)
A imagem de $f$ é $[1, \infty)$.

**Ex. 5** — Determine para quais valores de $x$ é verdade que $|\sqrt{x} - 2| - 1 \geq 0$.
**Comentário:** trataremos dois casos, $\sqrt{x} - 2 \geq 0$ e $\sqrt{x} - 2 < 0$. No entanto, observamos que a expressão só faz sentido quando $x \geq 0$, porque extraímos a raiz quadrada de $x$.
i) $\sqrt{x} - 2 \geq 0$ – ou seja,

$$\begin{aligned} \sqrt{x} &\geq 2 \\ x &\geq 4 \end{aligned}$$

Então desenvolvemos:

$$\begin{aligned} \sqrt{x} - 2 - 1 &\geq 0 \\ \sqrt{x} &\geq 3 \\ x &\geq 9 \end{aligned}$$

Portanto, no caso (i), $x \geq 9$.
ii) $\sqrt{x} - 2 < 0$ – ou seja,

$$\begin{aligned} \sqrt{x} &< 2 \\ x &< 4 \end{aligned}$$

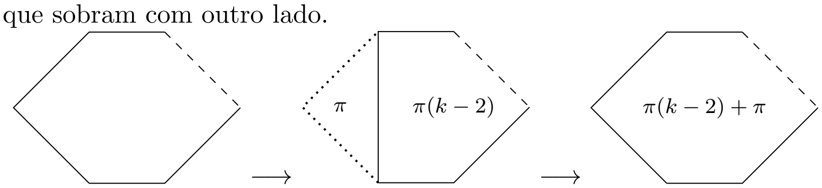
Então desenvolvemos:

$$\begin{aligned} -\sqrt{x} + 2 - 1 &\geq 0 \\ -\sqrt{x} &\geq -1 \\ \sqrt{x} &\leq 1 \\ x &\leq 1 \end{aligned}$$

Portanto, no caso (ii), $0 \leq x \leq 1$.
Assim, temos que a inequação vale para $0 \leq x \leq 1$ e também para $x \geq 9$.

## Questões extra:

**Ex. 6** — Prove por indução que a soma dos ângulos internos de um polígono convexo com $n$ vértices é $\pi(n-2)$ (lembre-se de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é $\pi$).
**Comentário:** Por indução na quantidade de lados. Base: a soma dos ângulos internos de um triângulo é $\pi$. A base é válida, então: $\pi(3-2) = \pi$.
Passo: supomos que um polígono convexo com $k$ lados tem a soma de seus ângulos internos igual a $\pi(k-2)$. Queremos provar que com $k+1$ lados um polígono terá a soma de ângulos internos igual a $\pi(k+1-2) = \pi(k-1)$
Tome agora um polígono *qualquer*[1] com $k+1$ lados. Podemos claramente remover dois lados do polígono, ligando os pontos que sobram com outro lado.




(A linha tracejada no lado superior direito de cada polígono significa que ali poderia haver mais lados e mais ângulos)
Temos agora um polígono com $k$ lados, e sabemos que seus ângulos internos somam $\pi(k-2)$. Ao desfazer a modificação (retirar o novo lado e devolver os lados antigos), adicionamos mais $\pi$ (os ângulos internos de um triângulo). Temos então a soma igual a

$$\pi(k-2) + \pi = \pi(k-1).$$

[1] É importante que seja “qualquer”, de outra forma poderíamos acabar demonstrando só para um tipo de polígono