

Bases Matemáticas – Prova I hipotética

Ex. 1 — Defina, usando linguagem simbólica, o que é $A \setminus B$.

Comentário: A definição é

$$A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$$

Ex. 2 — Leia a demonstração do seguinte Teorema e identifique a falha.

Teorema: $1 = 2$

Prova: Sejam a e b dois números iguais. Multiplicando ambos os lados de “ $a = b$ ” por a obtemos

$$a^2 = ab.$$

Subtraindo b^2 de ambos os lados,

$$a^2 - b^2 = ab - b^2.$$

Fatorando,

$$(a + b)(a - b) = b(a - b).$$

Subtraindo $(a - b)$, temos

$$a + b = b.$$

Quando a e b valem 1, temos que

$$1 + 1 = 1$$

e a demonstração está concluída. □

Comentário: Primeiro, onde se lê “subtraindo” deve-se ler “multiplicando por”. Além disso, $(a - b) = 0$, e o máximo que se pode concluir é que $0 = 0$.

Ex. 3 — Prove que para quaisquer conjuntos A e B , $(A \cap B) \subset (A \cup B)$.

Comentário: Deve-se lembrar que $A \cap B$ é $\{x : x \in A \text{ e } x \in B\}$; $A \cup B$ é $\{x : x \in A \text{ ou } x \in B\}$. Assim, se x está em A e também está em B , deve estar em A . Se está em A , está em A ou em B , e pertence a $A \cup B$.

Ex. 4 — Fixe dois números naturais a e b . Mostre que para todo n inteiro maior que um, $(a - b) \mid (a^n - b^n)$.

Comentário: Quando dizemos “fixe dois números”, isso significa “para quaisquer a e b que se queira fixar”. A base de indução é para $n = 1$: $(a - b) \mid (a - b)$

No passo, presuma que $(a - b) \mid (a^k - b^k)$, ou seja, há z inteiro tal que $a^k - b^k = z(a - b)$ faça

$$\begin{aligned} a^{k+1} - b^{k+1} &= aa^k - bb^k \\ &= aa^k + [-ab^k + ab^k] - bb^k \\ &= a(a^k - b^k) + ab^k - bb^k \\ &= a[z(a - b)] + ab^k - bb^k \\ &= az(a - b) + b^k(a - b) \\ &= (az + b^k)(a - b) \\ &= w(a - b). \end{aligned}$$

Note que podemos garantir que z e w são inteiros.

Questão extra:

Ex. 5 — Prove o seguinte Teorema por indução.

Teorema: Sejam X, X_1, X_2, \dots, X_n conjuntos. Então

$$X \cap (X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n) = (X \cap X_1) \cup (X \cap X_2) \cup \dots \cup (X \cap X_n).$$