Bases Matemáticas – Prova I hipotética

Ex. 1 — Leia a demonstração a seguir:
Prova de que *se a e b são reais e ab é irracional, então pelo menos um dentre a e b deve ser irracional.*
Se tanto a como b forem racionais, então há $k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{Z}$ tais que $a = k_1/k_2$ e $b = k_3/k_4$. Então, $ab = (k_1/k_2)(k_3/k_4) = \frac{(k_1 k_3)}{(k_2 k_4)}$ – o que significa que ab poderia ser escrito como quociente de dois inteiros. Portanto, se ab é irracional, ou a ou b deve ser irracional. $\square$

a)Reescreva a proposição provada em linguagem simbólica

b)Diga que técnica de prova foi usada, e mostre as proposições envolvidas (mostre quando são usadas negações, recíprocas ou contrapositivas).

Ex. 2 — Explique a diferença entre as duas proposições abaixo, e diga porque uma delas é verdadeia e a outra falsa.

a)$\forall a, \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R} : \forall c \in \mathbb{R}, ab = c$

b)$\forall a, \in \mathbb{R}, \forall c \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R} : ab = c$

Ex. 3 — Prove que $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$ (lembre-se da definição de união, interseção e complemento de conjuntos!).

Ex. 4 — Prove por indução que $\sum_{i=0}^{n} x^i = (x^{n+1} - 1)/(x - 1)$, para $n \geq 1$ e $x \neq 1$.

Questões extra:

Ex. 5 — Prove por indução que a soma dos ângulos internos de um polígono convexo com n vértices é $\pi(n-2)$ (lembre-se de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180^o).

Ex. 6 — Prove por indução que o número de Fibonacci com índice $3n$ é par (ou seja, $F_{3n} = 2k, k \in \mathbb{Z}$).
Lembre-se que:
$F_0 = 0$
$F_1 = 1$
$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$