Bases Matemáticas – Prova II

Critérios para avaliação: Clareza, corretude, rigor e concisão. (i) A redação das respostas deve ser clara. (ii) Todo o raciocínio desenvolvido na resposta deve estar correto. (iii) O nível de rigor nas respostas deve ser próximo ao usado nas aulas. (iv) As respostas não devem ser desnecessariamente longas.

Ex. 1 — Defina formalmente limite de sequência, e dê também uma explicação informal.
Comentário O limite de uma sequência (a_n) é L se, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe um n_0 tal que para todo $n > n_0$, temos $|a_n - L| < \varepsilon$.
Informalmente, o limite de uma sequência é L se, à medida que aumentamos n, a distância de a_n para L diminui *tanto quanto queiramos* (por isso na definição formal podemos escolher "qualquer ε".

Ex. 2 — Sejam

$$f(x) = \log(x^2)$$

e

$$g(x) = \frac{\cos(2x)}{\sqrt{|x| - 2}}$$

a) Determine $f \circ g$, $g \circ f$ e $f \circ f$.

b) Determine o domínio de $g \circ f$.

Comentário:

$$f \circ g(x) = \log\left(\frac{\cos(2x)}{\sqrt{|x| - 2}}\right)^2$$

$$g \circ f(x) = \frac{\cos(2\log(x^2))}{\sqrt{|\log(x^2)| - 2}}$$

$$f \circ f(x) = \log[\log(x^2)]^2$$

Domínio de $g \circ f$:

- $x^2 > 0$, porque está dentro do log, então:

$$x \neq 0 \tag{1}$$

- $\sqrt{|\log(x^2)| - 2} \neq 0$, porque está no denominador – mas isso é o mesmo que $|\log(x^2)| - 2 \neq 0$ Além disso, $|\log(x^2)| - 2 \geq 0$, para podermos extrair a raiz.

$$|\log(x^2)| - 2 > 0$$
$$|\log(x^2)| > 2$$

Há dois casos:
I: $\log(x^2) \geq 0$ (ou $x^2 \geq 1$).

$$\begin{aligned} \log(x^2) &> 2 \\ x^2 &> e^2 \end{aligned}$$

Então,

$$x > e \ \textbf{ ou } \ x < -e. \tag{2}$$

II: $\log(x^2) < 0$ (ou $0 < x^2 < 1$).

$$\begin{aligned} -\log(x^2) &> 2 \\ \log(x^2) &< -2 \\ x^2 &< \frac{1}{e^2} \end{aligned}$$

Então,

$$x < 1/e \ \textbf{ ou } \ x > -1/e. \tag{3}$$

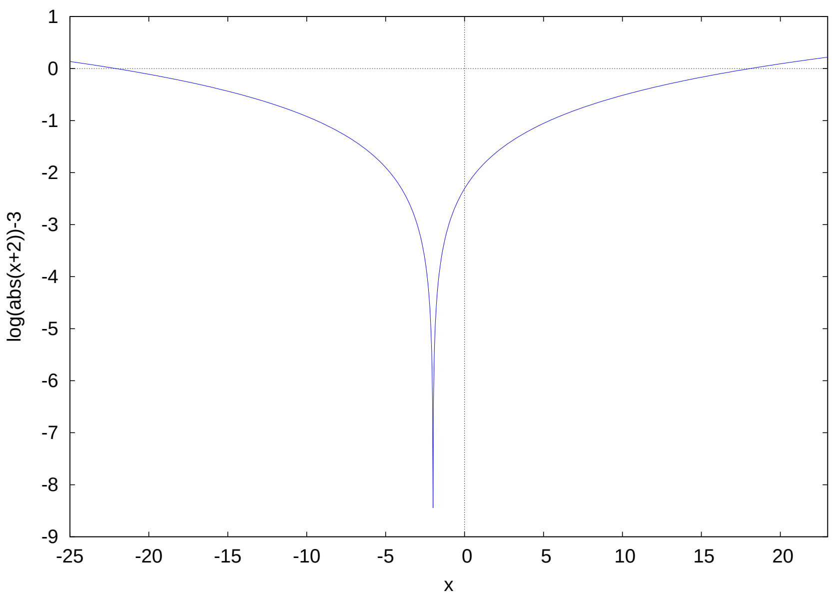
De (1), (2), (3) temos

$$\text{Dom } g \circ f = (-\infty, -e) \cup (-e^{-1}, 0) \cup (0, e^{-1}) \cup (e, \infty).$$

Ex. 3 — Esboce o gráfico de

$$f(x) = \log(|x+2|) - 3$$

Identifique o ponto onde a função cruza o eixo x.



Pontos onde a função cruza o eixo x:

$$\log(|x+2|) - 3 = 0$$
$$\log(|x+2|) = 3$$

Caso I, $x + 2 \geq 0$:

$$\log(x+2) = 3$$
$$x + 2 = e^3$$
$$x = e^3 - 2$$

Caso II, $x + 2 < 0$:

$$\begin{aligned}
\log(-x-2) - 3 &= 0 \\
\log(-x-2) &= 3 \\
-x-2 &= e^3 \\
x+2 &= -e^3 \\
x &= -e^3 - 2
\end{aligned}$$

Os pontos são $-e^3 - 2$ e $e^3 - 2$, se a base for e.

Ex. 4 — Sem usar argumentos usando limite (não argumente que algo "tende a infinito" ou que "tende a zero"), mostre que a sequência a seguir é crescente, que é decrescente ou que não é nenhum dos dois.

$$a_n = \frac{e^x}{\sqrt{x}}$$

Comentário:

$$\begin{aligned}
\frac{e^x}{\sqrt{x}} &< \frac{e^{x+1}}{\sqrt{x+1}} \\
e^x\sqrt{x+1} &< ee^x\sqrt{x} \\
\sqrt{x+1} &< e\sqrt{x} \\
x+1 &< e^2 x \\
1 &< e^2 x - x \\
1 &< x(e^2-1) \\
\frac{1}{e^2-1} &< x
\end{aligned}$$

e como $\frac{1}{e^2-1}$ é menor que 1, a sequência é crescente.

Ex. 5 — A função $2^{\cos x}$ é injetora? Sobrejetora? Porque? (Domínio = contradomínio = $\mathbb{R}$)
Comentário: não é injetora, porque $2^{\cos 0} = 2^{\cos 2\pi}$. Não é sobrejetora, porque não há x tal que $2^{\cos x} = 10$. Ou ainda, Não é sobrejetora, porque a imagem é $[0.5, 2]$, diferente do contradomínio ($\mathbb{R}$).

Questões extra:

Ex. 6 — Sejam

$$f(x) = \log\left(\frac{1}{|x|}\right)$$

$$g(x) = \frac{1}{1-\sqrt{x}}$$

Determine o domínio de $f \circ g \circ g$.
Comentário:

$$f \circ g \circ g = \frac{1}{\left|1 - \sqrt{\frac{1}{1-\sqrt{x}}}\right|}$$

A) $x \geq 0$, porque extraímos sua raiz.

B) $1/(1-\sqrt{x}) > 0$, pelo mesmo motivo.

C) O denominador não pode ser zero.

B:

$$\begin{aligned}1-\sqrt{x} &> 0\\ \sqrt{x} &< 1\\ x &< 1\end{aligned}$$

C:

$$\begin{aligned}\left|1-\sqrt{\frac{1}{1-\sqrt{x}}}\right| &\neq 0\\ 1-\sqrt{\frac{1}{1-\sqrt{x}}} &\neq 0\\ \sqrt{\frac{1}{1-\sqrt{x}}} &\neq 1\\ \frac{1}{1-\sqrt{x}} &\neq 1\\ 1 \neq 1-\sqrt{x}&\\ x &\neq 0\end{aligned}$$

De **A**, **B** e **C**, temos

$$\text{Dom } f\circ g\circ g = (0,1)$$