Bases Matemáticas – Prova III

Critérios para avaliação: Clareza, corretude, rigor e concisão. (i) A redação das respostas deve ser clara. (ii) Todo o raciocínio desenvolvido na resposta deve estar correto. (iii) O nível de rigor nas respostas deve ser próximo ao usado nas aulas. (iv) As respostas não devem ser desnecessariamente longas.

Importante: nesta prova você *não* deve usar a regra de L'Hopital (não use derivadas para calcular limites).

Ex. 1 — Explique o que é o limite de uma função $f(x)$ quando $x \to a$.
Comentário: veja notas de aula.

Ex. 2 — Determine os limites das sequências quando $n \to \infty$. Calcule em detalhes, usando as propriedades de limite, e não argumentando informalmente.

a) $a_n = \frac{\sqrt{n}+1}{n+7}$
Comentário:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{n+7} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{n}}{n} + 1/n}{1+7/n} \\
&= \frac{\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n} + 1/n}{\lim_{n\to\infty} 1+7/n} \\
&= \frac{\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n} + \lim_{n\to\infty} 1/n}{1+\lim_{n\to\infty} 7/n} \\
&= \frac{\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n} + \lim_{n\to\infty} 1/n}{1+7\lim_{n\to\infty} 1/n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n} + \lim_{n\to\infty} 1/n \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

b) $b_n = \frac{2n^3+5}{n(n+2)(n-1)}$

Comentário:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3+5}{n(n+2)(n-1)} &= \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3+5}{n(n+2)(n-1)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3+5}{n^3+n^2-2n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2+5/n^3}{1+1/n-2/n^2} \\
&= \frac{\lim_{n\to\infty} 2+5/n^3}{\lim_{n\to\infty} 1+1/n-2/n^2} \\
&= \frac{2+5\left(\lim_{n\to\infty} 1/n^3\right)}{1+(\lim_{n\to\infty} 1/n)-2\left(\lim_{n\to\infty} 1/n^2\right)} \\
&= 2.
\end{aligned}$$

c) $c_n = \frac{(-e)^n}{e^n}$
Comentário: Para valores pares c_n é $+1$, e para ímpares é -1. **A sequência não converge, e o limite não existe.**

d) $\lim_{x\to\infty} \frac{e^{\log(\frac{1}{x})}}{\sqrt{x}}$
Comentário:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{e^{\log(\frac{1}{x})}}{\sqrt{x}} &= \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{\sqrt{x}} \\
&= \left(\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\right)\left(\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \\
&= 0 \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ex. 3 — Calcule os limites das funções. Se o limite pela esquerda for diferente do limite pela direita, mostre os dois.

a) $\lim_{x\to 2} \sqrt{\frac{x^4-2}{5x^3+x}}$
Comentário: A função é definida em $x = 2$, portanto basta substituir. O limite é $1/\sqrt{3}$.

b) $\lim_{x\to 0} \frac{|xe^x|}{x}$ O limite pela direita é $+1$; pela esquerda é -1.
Comentário:

Ex. 4 — Determine as derivadas das funções:

a) $\frac{d}{dx} 4x^3 + \ln(x)$
Comentário: $12x^2 + \frac{1}{x}$

b) $\frac{d}{dx}\text{sen}\,(\ln(x)) + x$
Comentário:

$$\frac{\cos(\ln(x))}{x} + 1$$

c) $\frac{d}{dx} \frac{\sqrt{e^x}}{x^2}$
Comentário:

$$\frac{\sqrt{e^x}}{2x^2} - \frac{2\sqrt{e^x}}{x^3}$$

d) $\frac{d}{dx} \cos(x^2+4x)$
Comentário: $-(2x+4)\text{sen}\,(x^2+4x)$

Ex. 5 — **(EXTRA)** Diga detalhadamente e claramente porque não definimos limite lateral para sequências.
Comentário: Porque para toda sequêncioa (a_n) os valores a_n são definidos para todo $n \in \mathbb{N}$ – não faz sentido falar em aproximação de a_n, porque o domínio de uma sequência é $\mathbb{N}$ ($n + \epsilon$, para ϵ tão pequeno quanto queiramos, não será natural).