Introdução à Probabilidade e à Estatística – Prova III

Critérios para avaliação: Clareza, corretude, rigor, e concisão (i) A redação das respostas deve ser clara. (ii) Todo o raciocínio desenvolvido na resposta deve estar correto. (iii) O nível de rigor nas respostas deve ser próximo ao usado nas notas de aula e bibliografia básica. (iv) As respostas não devem ser mais longas que o necessário.

Atenção: não há uma pontuação “por questão”. A nota da prova pretende aferir a compreensão, de forma ampla, do conteúdo.

Ex. 1 — Lança-se, simultaneamente, uma moeda e um dado. O dado é honesto, mas a moeda não, sendo que

$$P(\text{cara}) = 1/3$$
$$P(\text{coroa}) = 2/3$$

a) Obtenha a distribuição conjunta das variáveis X = número de caras, e Y = número da face do dado voltada para cima.

b) Obtenha as distribuições marginais e X e Y.

c) Verifque se X e Y são independentes.

d) Calcule $P(X = 2, Y = 3)$, $P(X > 2, Y < 5)$.

Comentário, só (c) e (d):
(c) sim, porque $p(x, y) = p(x)p(y)$ para todos x e y, como se pode ver na tabela.
(d) 1/9 e zero

Ex. 2 — O estoque de um reagente químico em uma indústria química é reposto uma vez por semana. O volume semanal de saída do reagente é dado por uma variável aleatória com densidade

$$f(x) = \begin{cases} 3(1-x)^2 & \text{se } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{se } x \notin [0, 1] \end{cases}$$

Qual deve ser a capacidade do estoque para que a probabilidade de não haver reagente suficiente em uma semana seja de $0,01$?
Comentário:
Queremos $P[X \leq k] = 0.99$. Assim,

$$\int_0^k 3(1-x)^2 dx = 0.99$$
$$k^3 - 3k^2 + 3k = 0.99$$

Só isto já basta na resposta! Mas podemos continuar: $(1-k)^3 = (-k)^3 + 3k^2 - 3k + 1$, logo podemos escrever

$$\begin{aligned}(-k)^3 + 3k^2 - 3k + 1 &= -\left[k^3 - 3k^2 + 3k\right] + 1\\ (1-k)^3 &= -[k^3 - 3k^2 + 3k] + 1\\ -(1-k)^3 &= k^3 - 3k^2 + 3k - 1\\ k^3 - 3k^2 + 3k &= -(1-k)^3 + 1\end{aligned}$$

Assim, voltando ao problema original,

$$\begin{aligned}(1-k)^3 - 1 &= -0.99\\ (1-k)^3 &= 1 - 0.99\\ (1-k)^3 &= 0.01\\ 1-k &= \sqrt[3]{0.01}\\ k &= 1 - \sqrt[3]{0.01}.\end{aligned}$$

Este valor, apenas para referência, é $0.78455\ldots$.

Ex. 3 — Sabe-se que o tempo que um aparelho pode funcionar sem manutenção tem distribuição exponencial, com média de 2 meses. Qual é a probabilidade deste equipamento funcionar mais de um mês sem manutenção?
Comentário:
A probabilidade do aparelho conseguir operar 1 mês ou mais sem interrupção é $P[X \geq 1]$. Usando a distribuição exponencial com média de 2 meses, temos $\lambda = 1/\mu = 1/2$. Logo,

$$\begin{aligned}P[X \geq a] &= 1 - \int_0^a \lambda e^{-\lambda x} dx\\ P[X \geq 1] &= 1 - \int_0^1 \frac{1}{2} e^{-x/2} dx\\ &= \frac{1}{\sqrt{e}}.\end{aligned}$$

Ex. 4 — A duração da gestação para mulheres em uma população tem média igual a 268 dias, com desvio padrão de quinze dias. Um posto de saúde em área remota está acompanhando 25 mulheres grávidas. Qual é a probabilidade da média de tempo de gestação *destas 25 mulheres* ser menor que 260 dias?
Comentário:
Temos $n = 25$ mulheres, $\mu = 268$ e $\sigma = 15$.
Usamos o Teorema Central do Limite; a distribuição normal que nos interessa é

$$\mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma}{n}\right).$$

A probabilidade que queremos é, portanto

$$\begin{aligned}
P[\overline{X} < 260] &= P\left[\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{260 - 268}{15/5}\right] \\
&= P\left[Z < -\frac{8}{3}\right] \\
&= P[Z < -2.67] \\
&= \Phi(-2.67) \\
&= 1 - \Phi(2.67) \\
&= 1 - 0.9962 \\
&= 0.0038
\end{aligned}$$