Introdução à Probabilidade e à Estatística – Exame

Critérios para avaliação: Clareza, corretude, rigor, e concisão (i) A redação das respostas deve ser clara. (ii) Todo o raciocínio desenvolvido na resposta deve estar correto. (iii) O nível de rigor nas respostas deve ser próximo ao usado nas notas de aula e bibliografia básica. (iv) As respostas não devem ser mais longas que o necessário.

Atenção: não há uma pontuação "por questão". A nota da prova pretende aferir a compreensão, de forma ampla, do conteúdo.

Ex. 1 — De quantas maneiras 20 livros distintos podem ser colocados em 4 caixas iguais, contendo 5 livros cada caixa?
Comentário:
Na primeira caixa, $\binom{20}{5}$; na segunda $\binom{15}{5}$, e assim por diante.

$$\binom{20}{5}\binom{15}{5}\binom{10}{5}\binom{5}{5}$$

Como estamos tratando as caixas como diferentes, e dissemos que são iguais, descontamos a ordem:

$$\frac{\binom{20}{5}\binom{15}{5}\binom{10}{5}\binom{5}{5}}{4!}$$

Ex. 2 — Qual é a probabilidade de conseguir sete vezes a face um ou a face dois ao jogar dez vezes um dado de seis faces, sabendo que o dado é viciado, sendo $P(1) = 1/4$, e $P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6)$?
Comentário:
Primeiro, $P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = 3/20$, para que as probabilidades somem um.
Os eventos são: X, face um ou dois e Y, outras faces.

$$P[X] = \frac{1}{4} + \frac{3}{20} = \frac{2}{5}$$
$$P[Y] = 4\left(\frac{3}{20}\right) = \frac{3}{5}.$$

Agora, observamos que temos uma distribuição binomial. Logo, a probabilidade pedida é

$$\binom{10}{7}\left(\frac{2}{5}\right)^7\left(\frac{3}{5}\right)^3$$

Ex. 3 — A concentração média de uma certa bactéria em uma cultura é de $15/\text{ml}$. Qual é a probabilidade de haver mais que 160 bactérias em 10ml?
Comentário:

1) Para “exatamente” 160:
Por ml, a média é 15. Em cada 10ml, teremos em média de 150. Logo, $\lambda = 150$.

$$P[X = 160] = e^{-150}\frac{150^{160}}{160!}$$

2) Para “mais que” 160 (lembre-se de que a quantidde de bactérias é discreta!)

$$P[X \geq 160] = 1 - \sum_{k=0}^{160} e^{-150}\frac{150^k}{k!}$$

Considerei tanto (1) como (2) corretos.

Ex. 4 — Uma moeda honesta e um dado viciado são jogados. Para o dado, $P(1) = 1/2$, e $P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6)$.

a) Obtenha a distribuição conjunta das variáveis
$X = 0$ para cara, 1 para coroa
$Y =$ número da face do dado voltada para cima.

b) Obtenha as distribuições marginais e X e Y.

c) Verifique se X e Y são independentes.

d) Calcule $P(X = 0, Y = 2)$, $P(X = 1, Y < 4)$.

Comentário:

Observe:

$$P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = 1/10.$$

Ex. 5 — Acredita-se que o tempo de duração de um aparelho eletrônico tem distribuição exponencial. A esperança de tempo de funcionamento (tempo médio antes de falha, ou “MTBF”) é de 10^6 horas. Qual é a probabilidade do equipamento durar pelo menos 80% das 10^6 horas?.
Comentário:

Queremos a probabilidade de uma falha acontecer antes de $(0.8)10^6$.
Esperança = média = $1/\lambda$, logo $\lambda = 1/10^6$.

$$P[X > (0.8)10^6] = \int_0^{8.10^5} 10^{-6}e^{10^6}\,dx = 1 - e^{-\frac{8.10^5}{10^6}} = 1 - e^{-4/5}$$

Ex. 6 — Uma indústria declara que suas barras de chocolate com amendoim comtém, em média, 5 amendoins cada. Um órgão de defesa do consumidor seleciona 40 barras aleatoriamente e verifica a quantidade de amendoins em cada uma delas. A média obtida na amostra é de 4 amendoins. Qual é a probabilidade da média ser maior ou igual à declarada pela indústria?
Comentário:

A variável que dá a quantidade de amendoins em cada barra é X, com média μ. Como só temos a média, e não a variancia, não podemos usar o Teorema do Limite Central.
(Esqueci de incluir o desvio padrão; a questão foi anulada.)