

Introdução à Probabilidade e à Estatística – Prova I

Critérios para avaliação: Clareza, corretude, rigor, e concisão (i) A redação das respostas deve ser clara. (ii) Todo o raciocínio desenvolvido na resposta deve estar correto. (iii) O nível de rigor nas respostas deve ser próximo ao usado nas notas de aula e bibliografia básica. (iv) As respostas não devem ser mais longas que o necessário.

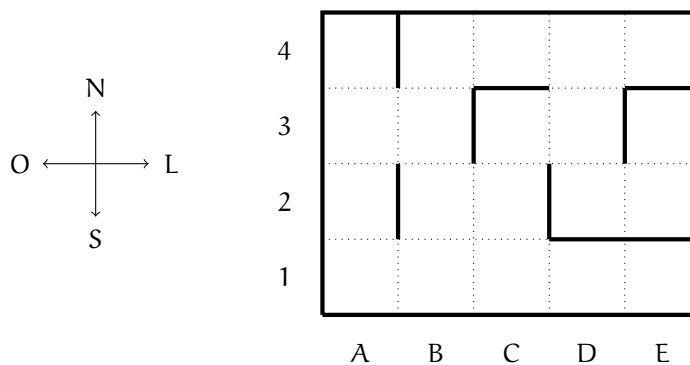
Atenção: não há uma pontuação “por questão”. A nota da prova pretende aferir a compreensão, de forma ampla, do conteúdo.

Ex. 1 — Em uma urna há 6 bolas brancas e 8 bolas pretas. Sorteiam-se 3 bolas. Qual é a probabilidade de serem sorteadas mais bolas pretas do que brancas?

Comentário: Queremos os eventos PPP, BPP, PBP, PPB.

$$\begin{array}{r} \frac{8}{14} \frac{7}{13} \frac{6}{12} \\ + \frac{6}{14} \frac{8}{13} \frac{7}{12} \\ + \frac{8}{14} \frac{6}{13} \frac{7}{12} \\ + \frac{8}{14} \frac{7}{13} \frac{6}{12} \\ \hline \frac{8}{13} \\ \approx 0.6153. \end{array} \begin{array}{l} \text{(PPP)} \\ \text{(BPP)} \\ \text{(PBP)} \\ \text{(PPB)} \end{array}$$

Ex. 2 — Um robô está em um andar de um edifício, representado como um labirinto. O robô consegue se mover em quatro direções (N, S, L, O), e tem sensores que ajudam a identificar paredes, também nas quatro direções. Ele tem o mapa do andar, mas não sabe onde está.



Se o robô usa o sensor na direção Norte e percebe que há uma parede, qual é a probabilidade dele estar em alguma local com coordenada numérica maior ou igual a 3 (ou seja, de estar na metade superior do mapa)?

Comentário: Se há uma parede ao norte, o robô pode estar em 9 posições. Destas, sete são na parte superior do mapa, portanto a probabilidade é

$$\frac{7}{8}$$

Ex. 3 — Uma fábrica tem duas máquinas que produzem rebites. A primeira máquina tem capacidade maior, e produz 80% dos rebites; a segunda máquina produz os outros 20%.

Dentre os rebites produzidos pela primeira máquina, 5% tem defeito; já a segunda máquina produz rebites com defeito com probabilidade 0.02.

Qual é a probabilidade de um rebite produzido por esta fábrica, escolhido ao acaso, ser defeituoso?

Comentário: Defina os eventos:

- A: rebite foi feito pela máquina grande;
- B: rebite foi feito pela máquina pequena;
- D: rebite com defeito.

COMO A, B SÃO PARTIÇÃO DE Ω , então podemos usar o Teorema da Probabilidade Total.

$$\begin{aligned}\Pr(D) &= \Pr(D|A) \Pr(A) + \Pr(D|B) \Pr(B) \\ &= (0.05)(0.8) + (0.02)(0.2) \\ &= 0.044\end{aligned}$$

Ex. 4 — Presuma que a prevalência de uma doença é 0.005, e um teste para esta doença tem sensibilidade de 0.99. Se uma pessoa qualquer é testada e tem resultado positivo, qual é a probabilidade de ter a doença?

(Prevalência = probabilidade de uma pessoa qualquer da população ter a doença; sensibilidade = probabilidade do resultado ser positivo, dado que o paciente tem a doença)

Comentário: Sejam

- D: prevalência
- P: probabilidade de teste positivo

$$\begin{aligned}\Pr(D|P) &= \frac{\Pr(P|D) \Pr(D)}{\Pr(P)} \\ &= \frac{\Pr(P|D) \Pr(D)}{\Pr(P|D) \Pr(D) + \Pr(P|\bar{D}) \Pr(\bar{D})} \\ &= \frac{(0.99)(0.005)}{(0.99)(0.005) + \Pr(P|\bar{D})(0.995)}.\end{aligned}$$

O resultado fica em função da probabilidade de falso positivo ($\Pr(P|\bar{D})$).