Introdução à Probabilidade e à Estatística – Prova II

Critérios para avaliação: Clareza, corretude, rigor, e concisão (i) A redação das respostas deve ser clara. (ii) Todo o raciocínio desenvolvido na resposta deve estar correto. (iii) O nível de rigor nas respostas deve ser próximo ao usado nas notas de aula e bibliografia básica. (iv) As respostas não devem ser mais longas que o necessário.

Atenção: não há uma pontuação "por questão". A nota da prova pretende aferir a compreensão, de forma ampla, do conteúdo.

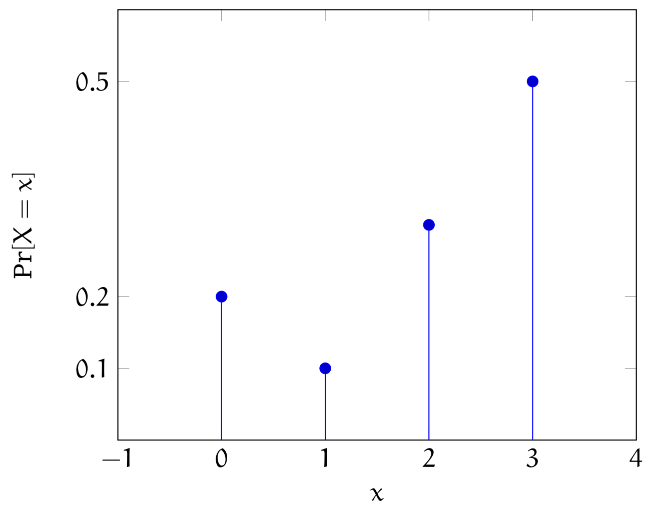
Ex. 1 — Seja X uma variável aleatória discreta com $P[X = 0] = 0.2$, $P[X = 1] = 0.1$, $P[X = 2] = 0.2$, $P[X = 3] = 0.5$.

a) Faça um gráfico da função de probabilidade.

b) Calcule a esperança e a variância de X.

c) Determine as seguintes probabilidades: $P[0 \leq X \leq 1]$, $P[X \leq 2]$, $P[X > 2]$, $P[X > 2.5]$.

Comentário: (a)



(b)

$$\mathbb{E}[X] = 0(0.2) + 1(0.1) + 2(0.2) + 3(0.5) = 2.$$
$$\sigma_X^2 = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$$
$$= \left[0^2(0.2) + 1^2(0.1) + 2^2(0.2) + 3^2(0.5)\right] - 4 = 1.4$$

(c)

$$\begin{aligned}
\Pr[0 \le X \le 1] &= 0.2 + 0.1 = 0.3 \\
\Pr[X \le 2] &= 0.2 + 0.1 + 0.2 = 0.5 \\
\Pr[X > 2] &= 1 - \Pr[X \le 2] = 0.5 \\
\Pr[X > 2.5] &= \Pr[X = 3] = 0.5
\end{aligned}$$

Ex. 2 — O número médio mensal de acidentes aéreos envolvendo aviões comerciais em todo o mundo é igual a 2.5. Qual é a probabilidade de que

a) ocorram pelo menos dois acidentes no próximo mês?

b) ocorra no máximo um acidente no próximo mês?

Comentário: Presumimos distribuição de Poisson, com média $\lambda = 2.5$.

$$\begin{aligned}
\Pr[k = 0] &= \frac{e^{-}\lambda 2.5^{0}}{0!} = e^{-2.5} \\
\Pr[k = 1] &= \frac{e^{-}\lambda 2.5^{1}}{1!} = 2.5e^{-2.5}
\end{aligned}$$

Assim, (a) $\Pr[k \ge 2] = 1 - \Big(\Pr[k = 0] + \Pr[k = 1]\Big) = 1 - 3.5e^{-2.5}$.
(b) $\Pr[k < 2] = 1 - \Pr[k \ge 2] = 1 - (1 - 3.5e^{-2.5}) = 3.5e^{2.5}$.

Ex. 3 — Um jogador costuma acertar 60% de suas tentativas de lance livre no jogo de basquete. Ele nos porpôs um desafio: terá direito a vinte lances livres, e registraremos como pontuação a quantidade de cestas que ele fizer acima de dez (por exemplo, se fizer 14, registramos 4; se fizer 7, registramos -3).

a) Se concordarmos em pagar R\$100 por ponto neste jogo, qual será o valor esperado que pagaremos (ou receberemos, se for negativo)?

b) Qual é a probabilidade desse jogador errar todas as cestas?

c) Qual é a probabilidade da primeira cesta acontecer após a décima?

d) Qual é a probabilidade de não pagarmos nem recebermos qualquer quantia?

Comentário:
(a) O número de acertos segue distribuição binomial. A esperança é

$$\mathbb{E}[X] = np = 20\frac{6}{10} = 12.$$

A quantidade de pontos é $X - 10$. A quantidade que pagamos é 100 vezes o número de pontos, logo $100(X - 10)$. Como a esperança é linear,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[100(X - 10)] &= 100(\mathbb{E}[X] - 10) \\
&= 100\,(12 - 10) \\
&= 200.
\end{aligned}$$

(b) Novamente, binomial!

$$\Pr[k = 0] = \binom{20}{0}(0.4)^{20}(0.6)^{0} = (0.4)^{20},$$

algo próximo de 10^{-8}.
(c) Soma de geométricas. As dez primeiras devem ser falhas.

$$\sum_{j=10}^{19} \Pr[k = j] = \sum_{j=10}^{29} (0.4)^j (0.6)$$

(d) Binomial,

$$\Pr[k = 10] = \binom{20}{10} (0.4)^{10} (0.6)^{10}$$