

Introdução à Probabilidade e à Estatística – Prova II

Critérios para avaliação: Clareza, corretude, rigor, e concisão (i) A redação das respostas deve ser clara. (ii) Todo o raciocínio desenvolvido na resposta deve estar correto. (iii) O nível de rigor nas respostas deve ser próximo ao usado nas notas de aula e bibliografia básica. (iv) As respostas não devem ser mais longas que o necessário.

Atenção: não há uma pontuação “por questão”. A nota da prova pretende aferir a compreensão, de forma ampla, do conteúdo.

Ex. 1 — Seja X uma variável aleatória discreta podendo assumir os valores 0, 1, 2, 3, e tal que $P[X = 0] = 0.1$, $P[X = 1] = 0.4$, $P[X = 2] = 0.2$,

a) Faça um gráfico da função de probabilidade.

b) Calcule a esperança e a variância de X .

c) Determine as seguintes probabilidades:

$$P[0 \leq X \leq 1],$$

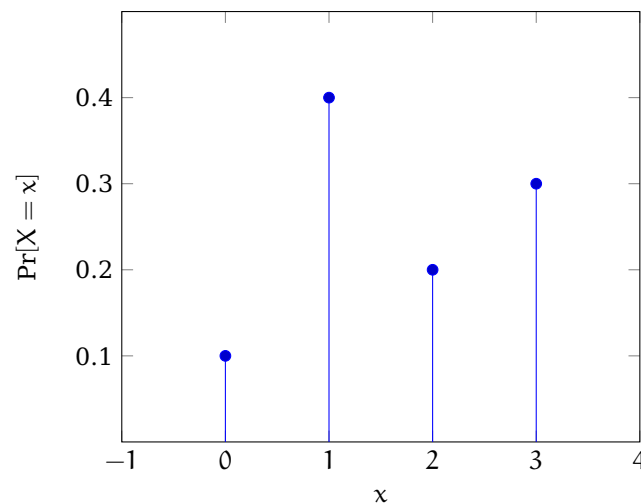
$$P[X \leq 2],$$

$$P[X > 2],$$

$$P[X > 2.5],$$

$$\Pr[X = 3]$$

Comentário: (a)



(b)

$$\mathbb{E}[X] = 0(0.1) + 1(0.4) + 2(0.2) + 3(0.3) = 1.7$$

$$\begin{aligned}
\sigma_X^2 &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 \\
&= \mathbb{E}[X^2] - 2.89 \\
&= 0^2(0.1) + 1^2(0.4) + 2^2(0.2) + 3^2(0.3) \\
&= 3.9 - 2.89 \\
&= 1.01.
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\Pr[0 \leq X \leq 1] &= 0.5 \\
\Pr[X \leq 2] &= 0.7 \\
\Pr[X > 2] &= 0.3 \\
\Pr[X > 2.5] &= 0.3 \\
\Pr[X = 3] &= 0.3
\end{aligned}$$

Ex. 2 — Uma pessoa verificou que em seus textos há uma média de 3 erros por página. Qual é a probabilidade dessa pessoa produzir

- duas páginas sem erros?
- exatamente 2 erros em uma página?

Comentário:

(a)

$$\begin{aligned}
\frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} &= \frac{e^{-6} 6^0}{0!} \\
&= e^{-6}
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} &= \frac{e^{-3} 3^2}{2!} \\
&= \frac{9e^{-3}}{2}.
\end{aligned}$$

Ex. 3 — Um jogador costuma acertar 40% de cobranças de pênalti. Se eu desafiá-lo a cobrar 30 pênaltis (contra um goleiro profissional), pagando a ele R\$200 por gol,

- Qual é o valor esperado que pagarei a ele?
- Qual é a probabilidade desse jogador errar todos os gols?
- Qual é a probabilidade do primeiro gol acontecer antes da quinta cobrança?
- Qual é a probabilidade de eu pagar exatamente R\$2000?

Comentário:

(a)

$$\mathbb{E}[X] = np = 12.$$

Pago R\$200 por gol, portanto R\$2400.

(b)

$$(0.4)^0 (0.6)^{30}$$

(c)

$$\Pr[Y = 1] + \Pr[Y = 2] + \Pr[Y = 3] + \Pr[Y = 4]$$

Ou seja,

$$(0.4) + (0.6)(0.4) + (0.6)^2(0.4) + (0.6)^3(0.4)$$

(d)

$$\binom{30}{10}(0.4)^{10}(0.6)^{20}$$