

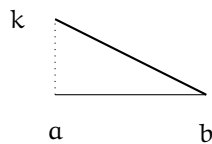
Introdução à Probabilidade e à Estatística – Prova III

Critérios para avaliação: Clareza, corretude, rigor, e concisão (i) A redação das respostas deve ser clara. (ii) Todo o raciocínio desenvolvido na resposta deve estar correto. (iii) O nível de rigor nas respostas deve ser próximo ao usado nas notas de aula e bibliografia básica. (iv) As respostas não devem ser mais longas que o necessário.

Atenção: não há uma pontuação “por questão”. A nota da prova pretende aferir a compreensão, de forma ampla, do conteúdo.

Ex. 1 — Quero atribuir uma função de densidade de probabilidade f a uma variável aleatória contínua em um intervalo $[a, b]$. A função deve ser decrescente, e deve ser tal que $f(b) = 0$. Descreva uma função que eu possa usar.

Comentário: construa um triângulo:



A área do triângulo deve ser um, logo

$$\frac{k(b-a)}{2} = 1$$
$$k = \frac{2}{b-a}$$

deve servir.

Assim, a função afim passando por $(0, k)$ e $(b, 0)$, que é

$$f(x) = \begin{cases} k(b-x)/(b-a) & x \in [a, b] \\ 0 & x \notin [a, b], \end{cases}$$

serve. Substituindo k ,

$$f(x) = \begin{cases} (2b-2x)/(b-a)^2 & x \in [a, b] \\ 0 & x \notin [a, b], \end{cases}$$

(Sim! É linear: “ $b-a$ ” é constante!)

Ex. 2 — Estudos determinaram que o ritmo de batimento cardíaco de recém-nascidos em uma população é de 130.10 por minuto, com desvio padrão de 7.5, seguindo uma distribuição normal. Qual é a probabilidade de um recém-nascido ter batimento com ritmo entre 120 e 135 por minuto?

Comentário:

$$\begin{aligned}\Pr[120 < B < 135] &= \Pr[(120 - 130.1)/7.5 < Z < (135 - 130.1)/7.5] \\ &= \Pr[-1.35 < Z < 0.65] \\ &= \Pr[Z < 0.65] - \Pr[Z < -1.35] \\ &= \Phi(0.65) - \Pr[Z < -1.34] \\ &= \Phi(0.65) - (1 - \Pr[Z < 1.35]) \\ &= \Phi(0.65) - 1 + \Phi(1.35) \\ &= 0.7422 - 1 + 0.9115 \\ &= 0.6537.\end{aligned}$$

Ex. 3 — Pessoas compram passagens aéreas com antecedência média de 20 dias, e com distribuição exponencial. Qual é a probabilidade de uma pessoa comprar uma passagem com dez dias de antecedência, ou menos?

Comentário: $1 - e^{-1/2} = 0.395$ (estava nas notas de aula)

Ex. 4 — (Bônus) Círculos são gerados aleatoriamente, e a área dos círculos (A) segue distribuição exponencial. Determine a função de densidade de probabilidade das variável aleatória R , que representa o raio do círculo.