Matemática Discreta – Prova comentada

Critérios para avaliação: Clareza, corretude, rigor, e concisão (i) A redação das respostas deve ser clara. (ii) Todo o raciocínio desenvolvido na resposta deve estar correto. (iii) O nível de rigor nas respostas deve ser próximo ao usado nas notas de aula e bibliografia básica. (iv) As respostas não devem ser mais longas que o necessário.

Ex. 1 — O que são funções geradoras? O que é o operador $[x^n]$ e para que é usado em problemas de contagem?
Comentário: Veja as notas de aula.

Ex. 2 — Mostre que em um poliedro qualquer sempre haverá duas faces com o mesmo número de arestas.
Comentário: Suponha que o poliedro tenha n faces. Cada aresta pode tocar $n-1$ outras através de arestas; chame a quantidade de arestas de cada face de "quantidade de vizinhos" da face[1]. Há $n-1$ quantidades possíveis de vizinhos, e n faces. Pelo princípio da casa dos pombos, há duas faces com a mesma quantidade de arestas.

Ex. 3 — Dê a forma fechada para a_n, sendo

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_1 &= 3 \\ a_{n+2} &= -a_n + 2a_{n+1} \end{aligned}$$

Use funções geradoras.
Comentário: Tomamos a equação recursiva e desenvolvemos, denotando por $A(X)$ a função geradora que queremos:

$$\sum_{i=0}^{n} a_{i+2}x^i = -A(x) + 2\sum_{i=0}^{n} a_{i+1}x^i$$

[1] Em analogia ao grau de um vértice em um grafo.

Usando o desenvolvimento que vimos em aula,

$$\begin{aligned}
\frac{A(x)-a_0-a_1x}{x^2} &= -A(x)+2\frac{A(x)-a_0}{x} \\
\frac{A(x)-3x}{x^2} &= -A(x)+2\frac{A(x)}{x} && \text{(valores de } a_0, a_1\text{)} \\
A(x)-3x &= -x^2A(x)+2xA(x) \\
A(x)(1+x^2-2x) &= 3x \\
A(x) &= \frac{3x}{x^2-2x+1} \\
&= (3)\left(\frac{x}{(1+x)^2}\right).
\end{aligned}$$

Assim, temos a função geradora $x/(1+x)^2$, que nos dá a sequencia

$$(0,1,2,3,\ldots), \quad a_n = n$$

multiplicada por 3, que resulta em

$$(0,3,6,9,\ldots), \quad a_n = 3n$$

Assim, a forma fechada é $a_n = 3n$.

Ex. 4 — Dê a forma fechada para a_n, sendo

$$\begin{aligned}
a_0 &= 1 \\
a_1 &= 3 \\
a_n &= 2a_{n-2}+3a_{n-1}
\end{aligned}$$

Use o método do polinômio característico.
Comentário: O polinômio característico é

$$x^2-3x-2=0$$

com raízes

$$x_1 = \frac{3-\sqrt{17}}{2}, \quad x_2 = \frac{\sqrt{17}+3}{2}$$

Temos então

$$a_n = c_1\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{\sqrt{17}+3}{2}\right)^n$$

Usamos a_0, a_1 e construímos o sistema

$$\begin{aligned}
c_1+c_2 &= 1 \\
c_1\left(\frac{\sqrt{17}-3}{2}\right)+c_2\left(\frac{\sqrt{17}+3}{2}\right) &= 3
\end{aligned}$$

Começamos por exemplo com $c_1 = 1-c_2$, obtendo

$$c_1 = \frac{\sqrt{17}-3}{2\sqrt{17}} \quad c_2 = \frac{3+\sqrt{17}}{2\sqrt{17}}$$

Finalmente,

$$a_n = \frac{\sqrt{17}-3}{2\sqrt{17}}\left(\frac{\sqrt{17}-3}{2}\right)^n + \frac{3+\sqrt{17}}{2\sqrt{17}}\left(\frac{\sqrt{17}+3}{2}\right)^n$$

Por exemplo, para $n = 2$, temos

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{\sqrt{17}-3}{2\sqrt{17}}\left(\frac{\sqrt{17}-3}{2}\right)^2 + \frac{3+\sqrt{17}}{2\sqrt{17}}\left(\frac{\sqrt{17}+3}{2}\right)^2 \\ &= 11, \end{aligned}$$

o que pode ser também verificado usando a recorrencia e os valores de a_0 e a_1.

Uma lista de funções geradoras:

$$\begin{array}{lcrl}
\frac{1}{1-x} & = & 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots & = \sum_{i=0}^{\infty} x^i \\
\frac{1}{1-cx} & = & 1 + cx + c^2x^2 + c^3x^3 + c^4x^4 + \cdots & = \sum_{i=0}^{\infty} c^i x^i \\
\frac{1}{1-x^2} & = & 1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \cdots & = \sum_{i=0}^{\infty} x^{2i} \\
\frac{x}{(1-x)^2} & = & x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \cdots & = \sum_{i=0}^{\infty} ix^i \\
(1+x)^n & = & 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \cdots & = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n}{i}x^i \\
e^x & = & 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots & = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}
\end{array}$$