Conjuntos de Julia

28 de fevereiro de 2011

(Este texto é adptado notas de aula de Paradigmas de Programação)

1 Funções Iteradas

Suponha que queiramos aplicar várias vezzes uma função f sobre um argumento. Por exemplo, se $f(x) = 2x+1$ e queremos aplicar três vezes a função em $x = 10$, temos

$$\begin{aligned} f(10) &= 2 \times 10 + 1 = 21 \\ f(21) &= 2 \times 21 + 1 = 43 \\ f(43) &= 2 \times 43 + 1 = 87 \end{aligned}$$

Dizemos que *iteramos* três vezes a função f no valor 10, e escrevemos $f^{(3)}(10) = 87$ (o "(3)" acima do f significa que a função é iterada tres vezes).

o algoritmo para iterar uma função é

```
res ← x_0
para i de 1 a n:
    res ← f(res)
```

(Aplique o algoritmo e verifique que realmente ele funciona)

2 Iterando funções complexas

Para tratar de Conjuntos de Julia voltaremos a atenção ao plano complexo.

Suponha uma função complexa $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$. Agora imagine, para ponto z no plano complexo, que iteramos f indefinidas vezes em z: $f^{(n)}(z)$. Olhamos para os valores resultantes das iterações e verificamos se a sequência deles converge.

3 Conjunto de Julia

O *conjunto de Julia de* f é a borda do conjunto de pontos z no plano complexo para os quais a sequência $(f^{(1)}(z), f^{(2)}(z), f^{(3)}(z), \cdots)$ *não* converge.

Em outras palavras, é o conjunto de pontos z para os quais

$$\lim_{n \mapsto \infty} |f^{(n)}(z)| = \infty$$

É comum denotar o conjunto de Julia de uma função por $J(f)$.

Trataremos aqui apenas de funções complexas quadráticas da forma $f(z) = z^2 + c$, onde c é uma constante.

A norma de um número complexo é a distância entre sua representação no plano complexo e a origem: $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Para as funções quadráticas com as quais lidaremos, se $|c| < 2$, $z \in \mathbb{C}$ e existe algum n tal que $|f^{(n)}(z)| \geq 2$, então $\lim_{n \mapsto \infty} |f^{(n)}(z)| = \infty$.

Ou seja, se após iterar a função notarmos que a norma do valor é maior ou igual a dois. Se for, sabemos que a sequência de valores não converge!

Podemos plotar o conjunto de Julia de uma função da seguinte maneira: Para cada ponto z no plano, calculamos os valores de $f(n)$ para algum n e verificamos se a norma torna-se maior ou igual a 2.

Construiremos um programa que, a partir de uma função quadrática complexa, desenha o conjunto de Julia *preenchido* para aquela função. O conjunto de Julia preenchido é o conjunto dos pontos para os quais a função iterada da forma que descrevemos não diverge (tomamos esta decisão porque este desenho parecerá mais interessante do que somente a borda do conjunto de Julia).

Seu programa deverá percorrer cada ponto do plano (somente a parte representada na tela, evidentemente) e iterar a função várias vezes sobre aquele ponto. Faça 150 vezes, por exemplo. Nos pontos onde a função converge, marque o pixel correspondente em branco. Nos pontos onde ela não converge, marque em preto.

Para $z^2 - 0.2 + 0.75i$, a imagem gerada é: