Programação Matemática– Prova I

Critérios para avaliação: Clareza, corretude e rigor. (i) A redação das respostas deve ser clara. (ii) Todo o raciocínio desenvolvido na resposta deve estar correto. (iii) O nível de rigor nas respostas deve ser próximo ao usado nas aulas.

Ex. 1 — Defina claramente o que é uma *solução degenerada* para um programa linear.
Comentário: É uma solução onde há variáveis básicas com valor igual a zero.

Ex. 2 — Converta o programa linear para a forma padrão $\max \mathbf{c}^T\mathbf{x}$, s.a. :$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

$$
\begin{aligned}
&\min \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\
&\text{s.a.}: x_1 - x_2 \leq x_3 \leq 3x_4 + 2 \\
&\qquad |x_1| + x_4 \geq 2
\end{aligned}
$$

Commentário:

$$x_1 = y_1 - y_2, \quad y_1, y_2 \geq 0$$

Assim, se $x_1 \geq 0$, temos $y_2 = 0$ e $y_1 = x_1$. Se $x_1 < 0$, temos $y_1 = 0$ e $y_2 = -x_1$.
Além disso, teremos $y_3 = x_2$, $y_4 = x_3$, $y_5 = x_4$

$$
\begin{aligned}
&\max\ -\mathbf{c}^T\mathbf{y} \\
&\text{s.a.}: y_1 - y_2 - y_3 - y_4 + s_1 = 0 \\
&\qquad y_4 - 3y_5 + s_2 = 2 \\
&\qquad y_1 + y_5 - s_3 = 2
\end{aligned}
$$

Ex. 3 — Se, durante a execução do método Simplex, uma determinada linha nunca for modificada nos tableaux, isso significa que ela poderia ser excluída do programa linear, sem que a solução ótima mude? E se isso acontecer, significa que a linha era redundante e o posto de A não era m? (Justifique cuidadosamente)
Comentário: *Não!* Suponha que a linha i (representando x_i) já estava na base quando iniciamos o Simplex, e que nunca foi modificada. As modificações que o Simplex faz nas linhas são:

- Mudar a coluna a_q que entra na base, zerando todos menos o q-ésimo elemento,
- Mudar a coluna a_p que sai da base, e
- *não* modificar o resto de A_B.

Se x_i era parte da solução ótima, já começou na base, e nunca foi retirada, ela nunca será modificada.

Ex. 4 — Seja o programa linear $\max \mathbf{c}^T\mathbf{x}$, s.a. :$A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$, e seu dual $\min \mathbf{b}^T\mathbf{y}$, s.a. :$A\mathbf{y} \geq \mathbf{c}$. Se mudarmos a i-ésima linha do primal de desigualdade para igualdede, o que acontece com o dual?
Comentário: Mudar a linha i para igualdade é o mesmo que adicionar uma nova linha com a mesma desigualdade, mas com sinal trocado.

$$
\begin{gathered}
\vdots \\
a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n \leq b_i \\
a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n \geq b_i \\
\vdots
\end{gathered}
$$

Para voltar à forma original do problema, multiplicamos a nova linha por -1:

$$
\begin{gathered}
\vdots \\
a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n \leq b_i \\
-a_{i1}x_1 - \ldots - a_{in}x_n \leq -b_i \\
\vdots
\end{gathered}
$$

Olhamos agora para o dual. Seja y' a variável associada à antiga linha i, e y'' associada à nova linha. Em cada j-ésima linha do dual teremos

$$a_{ij}y_i' - a_{ij}y_i'' = a_{ij}(y_i' - y_i'').$$

No objetivo do dual teremos

$$b_i y_i' - b_i y_i'' = b_i(y_i' - y_i'').$$

As variáveis y' e y'' sempre ocorrem na forma $(y' - y'')$, e portanto podemos substituí-la por uma só variável $y_i = y' - y''$. Então as linhas com as restrições do dual voltarão a ser as mesmas. No entanto, se $y'' > y'$, a variável y_i poderá ser *negativa*. (ou seja, *a variável dual associada à linha i do primal fica livre*).

Ex. 5 — Um fazendeiro está estudando a divisão de sua propriedade nas seguintes atividades produtivas:

- A (Arrendamento) - Destinar certa quantidade de alqueires para a plantação de cana-de-açúcar, a uma usina local, que se encarrega da atividade e paga pelo aluguel da terra \$300,00 por alqueire por ano.
- P (Pecuária) - Usar outra parte para a criação de gado de corte. A recuperação das pastagens requer adubação (100Kg/Alq.) e irrigação (100.000 litros de água/Alq.) por ano. O lucro estimado nessa atividade é de \$400,00 por alqueire por ano.
- S (Plantio de Soja) - Usar uma terceira parte para o plantio de soja. Essa cultura requer 200Kg por alqueire de adubos 200.000 litros de água/Alq. para irrigação por ano. O lucro estimado nessa atividade é de \$500,00/alqueire no ano.

A disponibilidade de recursos por ano é 12.750.000 litros de água, 14.000 Kg de adubo e 100 alqueires de terra. O fazendeiro quer determinar quantos alqueires deverá destinar a cada atividade para proporcionar o melhor retorno. Formule o problema como programa linear.
Comentário:

$$
\begin{aligned}
&\max\ 300a + 400p + 500s \\
&\text{s.a} : a + p + s = 100 \\
&\qquad 100p + 200s \leq 14000 \\
&\qquad 100000p + 200000s \leq 12750000
\end{aligned}
$$